Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 11, стр. 515 – 518 *10 декабря 1986 г.*

ОРБИТАЛЬНАЯ ДИНАМИКА В ^{3}He-*A* И ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ

А.В.Балацкий

Из эффективного действия фермионов во внешнем поле выводится величина динамического орбитального момента L_0 в ^{3}He-*A*. Показано, что $L_0 = 1/2(\rho - C_0)$ во всех порядках по Δ_0/ϵ_F. Прослежена связь с киральной аномалией в квантовой электродинамике. Указана корректная регуляризация в фермионном действии в случае ^{3}He-*A*.

В последнее время было показано, что методы теории поля являются плодотворным подходом при описании ^{3}He-*A* [1 ÷ 4]. С одной стороны уравнения Боголюбова для ^{3}He-*A* при наличии текстуры аналогичны уравнениям Дирака во внешнем поле. В то же время обращение энергетической щели в спектре квазичастиц в нуль в двух точках на ферми-поверхности при $k = \pm k_F \mathbf{l}$ приводит к существованию безмассовых фермионов. Таким образом, аномалии для безмассовых фермионов, возникающие под действием калибровочных полей, хорошо известные в теории поля [5, 6] существуют и в ^{3}He-*A*. Это позволило разрешить ряд парадоксов в теории сверхтекучего ^{3}He-*A* см. [2 – 4].

Однако имеется существенное различие между аномальными свойствами в квантовой электродинамике (КЭД) и в ^{3}He-*A*, вызванное различием в глубоких вакуумных уровнях фермионов, где уравнения Боголюбова отличаются от соответствующего уравнения Дирака. В частности, аномалия, связанная с несохранением кирального тока $\partial_\mu J^\mu = e^2/16\pi^2 F^*_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, т.е. перекачкой импульса из вакуума в возбуждения имеет одинаковый вид в обеих теориях, поскольку определяется фермионными уровнями вблизи $\pm k_F \mathbf{l}$, сама структура вакуумного тока, определяемая глубокими вакуумными уровнями, сильно различается. Это было показано в [2,3], где вычислялась временная компонента J^0, играющая роль потока массы в ^{3}He-A. Здесь мы вычислим спонтанный орбитальный момент в ^{3}He-A, т.е. поперечные к $\mathbf{l}$ компоненты тока J^μ. В КЭД они соответствуют пространственным компонентам тока [7,8]. Мы покажем, что аномальная малость спонтанного орбитального момента по сравнению с его аналогом в КЭД ($L_0 \cong [\hbar\rho(\Delta_0/\epsilon_F)^2 \ln(\epsilon_F/\Delta_0)] \sim \hbar\rho\cdot 10^{-6}$), является следствием отличия оператора Боголюбова в ^{3}He-A от оператора Дирака.

Эффективное действие, описывающее динамику вектора $\mathbf{l}$ имеет вид [9]

$$S_{eff} = -\ln\det M, \tag{1}$$

где $M = \begin{Bmatrix} \epsilon - i\partial_t; \alpha p_i(\Delta_1^i + i\Delta_2^i) \\ \alpha p_i(\Delta_1^i - i\Delta_2^i); -\epsilon - i\partial_t \end{Bmatrix}$, $\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2, [\vec{\Delta}_1\vec{\Delta}_2] = \mathbf{l}$ – орты орбитальной системы координат, спиновую часть параметра порядка предполагаем постоянной, Δ_0 – амплитуда щели, $\alpha = \Delta_0/k_F$, $\epsilon = (p^2/2) - \mu$ – энергия, отсчитываемая от уровня Ферми. Пренебрегая производными параметра порядка и выбирая $\mathbf{l} = \mathbf{l}(0) + \delta\mathbf{l}(r)$, где $\mathbf{l}(0) \parallel \hat{z}$ M можно записать в виде

$$M = \{\tau_3\partial_t + \alpha(\tau_1 P_1 + \tau_2 P_2) + i\epsilon\} = \not{D} + i\epsilon, \tag{2}$$

где τ_i – матрицы Паули, $P_i = \hat{p}_i - \delta l_i \hat{p}_z$ [2]. Вблизи полюсов ферми-сферы (2) переходит в оператор Дирака во внешнем поле $\mathbf{A} = k_F\delta\mathbf{l}$ [1-3]. Оператор M можно рассматривать как оператор Дирака в 2 + 1 измерениях во внешнем поле с массой ϵ, которая является квадратичным оператором. Известно, что в 2 + 1 КЭД существует аномалия четности $j_\mu \sim \epsilon_{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha}$ [10,11]. Мы покажем, что парадокс орбитального момента является проявлением в ^{3}He-A той же аномалии. Для этого рассмотрим отклик действия S_{eff} на адиабатическое изменение $\delta\mathbf{l}_\perp$, например δl_x. В этом случае из (1) и (2) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{eff}}{\delta l_x} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\frac{\alpha\tau_1\hat{p}_z}{\not{D}+i\epsilon} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} dS\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{S(\not{D}^2+\epsilon^2)}\alpha\tau_1\hat{p}_z(\not{D}-i\epsilon) = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} dS \sum_{k_\mu} \mathrm{e}^{-ik_\mu x_\mu}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{e}^{S(\not{D}^2+\epsilon^2)}\alpha\tau_1\hat{p}_z(\not{D}-i\epsilon)\,\mathrm{e}^{ik_\mu x_\mu}, \end{aligned} \tag{3}$$

где мы использовали стандартную процедуру вычисления Tr [5,11]. В итоге из (3), учитывая две проекции спина, получаем в главном порядке по градиентам:

$$\frac{\delta S_{eff}}{\delta l_x} = -L_0\partial_t l_y, \quad L_0 = -\frac{\alpha^2}{4}\sum_{k,S} k_z^2\,\frac{\partial}{\partial\epsilon}\,\frac{1}{E}, \tag{4}$$

где $E = \sqrt{\alpha^2(p_x^2+p_y^2)+\epsilon^2}$ энергия квазичастиц. Величина L_0 – есть не что иное как спонтанный орбитальный момент в ^{3}He-A [7,8]. Интегрируя выражение для L_0 по частям, можно получить *точную* формулу[1)]

$$L_0 = \frac{1}{2}(\rho - C_0), \tag{5}$$

где $\rho = \sum_k n_k = \frac{1}{2}\sum_k \frac{E-\epsilon}{E}$ – плотность частиц, а $C_0 = k_F^3/3\pi^2$, что полностью совпадает с феноменологическим описанием [12], использующим алгебру скобок Пуассона.

В (3) мы учли ту часть действия, которая линейна по временной производной и которая опускалась в [9], где были получены только квадратичные по $\dot{\mathbf{l}}$ и $\nabla_i\mathbf{l}$ члены в действии S_2. С учетом этих членов получаем следующие уравнения орбитальной динамики:

$$\frac{\delta S_2}{\delta\mathbf{l}} = -\frac{1}{2}(\rho - C_0)\left[\mathbf{l}\,\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t}\right]. \tag{6}$$

[1)] Я признателен Г.Е.Воловику, указавшему на тот факт, что формула (5) точна при произвольных α.

Отметим связь L_0 с киральным током $\mathbf{J}$ в КЭД. Окончательный ответ для эффективного действия зависит от способа регуляризации. Если ограничиться линейным разложением $\epsilon \cong (p_z - k_F) V_F$ и ввести симметричную относительно ϵ_F обрезку, то из (3) получаем киральный вакуумный ток $\mathbf{J}_{vac} = \dfrac{\delta S_{eff}}{\delta \mathbf{A}} = e^2/4\pi^2$ [$\mathbf{AE}$], где $\mathbf{E} = k_F \dot{\mathbf{l}}$ – электрическое поле [3]. Если же рассматривать ϵ как квадратичный оператор, что соответствует ^{3}He-A, то приходим к результату для спонтанного орбитального момента (6). Таким образом величина орбитального момента вакуума $L^{vac} = \hbar\rho/_2$ существенно перенормируется при учете момента, т.е. пространственных компонент тока возбуждений, для которых справедливо приближение уравнения Дирака. Кроме того из (6) следует, что не существует четырехмерного лагранжиана, вариация которого приводила бы к уравнению (6) – стандартная ситуация с уравнениями Ландау – Лифшица. Поэтому, чтобы корректно описать орбитальную динамику в ^{3}He-A, необходимо вводить действие Весса – Зумино [4], которое в данном подходе получается с правильным коэффициентом и, в принципе, может приводить к необычной статистике вихрей [13].

Действительно, введем дополнительный параметр τ, при этом $\mathbf{l}$ зависит от τ. В этом случае, аналогично выводу (3) – (6), в адиабатическом приближении, можно получить:

$$\delta S_{eff} = \int d\tau \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \tau} \frac{\delta S_{eff}}{\delta \mathbf{l}} = \int d^3x dt d\tau \, \frac{1}{2} (\rho - C_0) \mathbf{l} \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \tau} \right]. \tag{7}$$

Выражение (7) есть не что иное, как действие Весса – Зумино. Если при этом учесть фазу параметра порядка ϕ и комбинированную симметрию в ^{3}He-A $U^1_{comb} = \{\phi \to \phi + \alpha, \vec{\theta} \to \vec{\theta} - \alpha\mathbf{l}\}$, где $\vec{\theta}$ – угол поворота параметра порядка, то можно показать, что полное действие имеет вид:

$$S_{eff} = \int d^3x dt \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial t} \mathbf{l} \right) - \frac{1}{2} \int C_0 \mathbf{l} \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \tau} \right] d^3x dt d\tau. \tag{8}$$

Из (8) следует динамическая инвариантность C_0 и квантование момента $\int d^3_x L_0 = N/2$, где N – целое [4, 12]. Кроме того отметим, что второй член в (8) можно рассматривать как фазу Берри, поскольку при адиабатическом изменении $\mathbf{l}$ вдоль замкнутого контура на сфере, он равен площади, заметаемой вектором $\mathbf{l}$, т.е. телесному углу, опирающемуся на этот контур [14].

Таким образом, парадокс спонтанного орбитального момента естественно разрешается, если учитывать влияние квазичастиц, взаимодействующих с бозонным полем вектора $\mathbf{l}$ на динамику вектора орбитального момента. Малость спонтанного орбитального момента в сверхтекучем ^{3}He-A объясняется малым коэффициентом α во взаимодействии квазичастиц с полем $\mathbf{l}$. Кроме того, полностью подтверждается полученная ранее феноменологическая связь ρ, C_0 и L_0 [12]. Выражение для L_0 согласуется со статическим моментом импульса, который тоже мал в меру $(\Delta_0/\epsilon_F)^2$ [15].

Мне приятно поблагодарить Г.Е.Воловика за многочисленные обсуждения.

Литература

1. *Combescot R., Dombre T.* Phys. Rev., 1986, **B33**, 79.
2. *Балацкий А.В., Воловик Г.Е., Конышев В.А.* ЖЭТФ, 1986, **90**, 2038; *Балацкий А.В., Конышев В.А.* ЖЭТФ, 1987, **92**, вып. 3.
3. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 428.
4. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **44**, 144.
5. *Fujikawa K.* Phys. Rev., 1980, **D21**, 2848.
6. *Alvarez-Gaume L., Ginsparg P.* Ann. of Phys. 1985, **161**, 423.
7. *Cross M.C.* J. Low. Temp. Phys., 1975, **21**, 525.
8. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1975, **22**, 412.

9. *Андрианов В.А., Попов В.Н.* ТМФ, 1976, **28**, 340.
10. *Niemi A.J., Semenoff G.W.* Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 2077.
11. *Ishikawa K.* Phys. Rev. Lett., 1984, **53**, 1615.
12. *Volovik G.E., Balatsky A.V.* J. Low. Temp. Phys., 1985, **58**, 1.
13. *Haldane F.D.M., Wu Y.S.* Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, 2887.
14. *Berry M.V.* Proc. Roy. Soc. London, 1984, **A392**, 45.
15. *Балацкий А.В., Минеев В.П.* ЖЭТФ, 1985, **89**, 2073.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 октября 1986 г.