Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 1, стр. 13 – 16 *10 января 1988 г.*

РАССЕЯНИЕ НА МОНОПОЛЕ ДИРАКА В ГЛОБАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ РАССЛОЕНИЯ

А.Г. Савинков

В глобальном пространстве расслоения найдена волновая функция рассеяния заряженной частицы на монополе Дирака.

Как известно, монополь Дирака, представляющий интерес для ряда физических задач, может быть описан в терминах расслоения [1,2] с глобальным пространством $P = \mathbb{C}^2 \backslash 0$ и слоем $U(1)$ [3–5]. Группа $U(1)$ действует на P по правилу $(z^1, z^2) \to (z^1 e^{i\alpha}, z^2 e^{i\alpha})$, что отвечает заряду $n = 2eg = 1$. Описание монополей с другими $n \in \mathbb{Z}$ получается из указанного факторизацией P по дискретной группе $\mathbb{Z}_n$ [1,6,7].

Для нашей задачи расслоение P с $n=1$ является универсальным. Проекция на базу $\mathbb{R}^3\setminus 0$ p: $\mathbb{C}^2\setminus 0 \to \mathbb{R}^3\setminus 0$ задается формулой $p(z,\bar z) = \bar z\,\sigma_i\, z = x_i$. Форма связности на таком расслоении дается выражением [4]:

$$\omega = (\bar z\,dz - z\,d\bar z)/2\bar z z.$$

Зная действие группы $U(1)$, легко найти вектор v, касательной к слою:

$$\frac{d}{d\alpha}\,\Psi(ze^{i\alpha};\ \bar z\,e^{-i\alpha})\,|_{\alpha=0} = iv\Psi(z,\bar z), \qquad v = z\partial - \bar z\,\bar\partial. \tag{2}$$

Значение $\omega(iv) = i$ – генератору группы Ли $U(1)$. Из (1) можно найти горизонтальные векторы h_i, $i = 1,2,3$, то есть такие, что $\omega(h_i) = 0$, которые при проекции p проектируются в $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$:

$$h_i = \frac{1}{2\bar z z}\,(\bar z\,\sigma_i\,\bar\partial + \partial\,\sigma_i\, z), \qquad ph_i = \partial_i. \tag{3}$$

Операторы h_i, v удовлетворяют соотношениям

$$[h_i, v] = 0, \qquad [h_i, h_j] = i\Omega_{ij}\,v,$$

где $\Omega_{ij} = \dfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,\dfrac{\bar z\,\sigma_k\, z}{(\bar z z)^3}$ – напряженность поля монополя, $\Omega = d\omega = \dfrac{1}{2}\,\Omega_{ij}\ dx^i \wedge dx^j$.

В работе [4] рассмотрена лагранжева механика точки в пространстве расслоения, после квантования которой возникает уравнение Шредингера с гамильтонианом заданным в глобальном пространстве расслоения. Предлагаемый в настоящей работе альтернативный метод заключается в том, что такой же результат можно сразу получить из глобального вариационного принципа, если рассмотреть функционал – квантово-механическое "действие", определенное в пространстве расслоения P. Этот принцип с очевидными изменениями переносится на теоретико-полевые задачи.

Возьмем

$$S = \int \Psi^*\,(i\partial_t + \frac{1}{2\mu}\,h_i h_i)\,\Psi\,dt \wedge dV, \tag{4}$$

где Ψ – волновая функция на P и $dV = \dfrac{\bar z z}{\pi}\,dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar z^1\wedge d\bar z^2$ – элемент объема на P, инвариантный относительно группы $U(1)$, который определяет скалярное произведение (Φ, Ψ) волновых функций. Любую Ψ можно разложить по представлениям $U(1)$

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi_n,$$

$$\Psi_n = P_n\Psi = \int_0^{2\pi} e^{-in\alpha}\,\Psi(ze^{i\alpha},\ \bar z\,e^{-i\alpha})\,\frac{d\alpha}{2\pi}$$

$$P_n^2 = P_n, \qquad P_nP_m = 0, \qquad n \neq m. \tag{5}$$

Из инвариантности dV сразу следует, что $\int \Psi_n^*\Psi_m\,dV = 0$ при $n\neq m$. Нетрудно показать (выбирая локальные координаты прямого произведения базы на слой и интегрируя затем вдоль слоя), что S отвечает обычной формулировке для описания заряженной частицы в поле монополя на базе $\mathbb{R}^3\setminus 0$ с зарядом n, если $\Psi = \Psi_n$.

Варьирование (4) по Ψ^* дает уравнение Шредингера в глобальном пространстве расслоения P:

$$i\partial_t\Psi = -\frac{1}{2\mu} h_l h_l \Psi \,, \tag{6}$$

где $h_l h_l = \frac{1}{\bar{z} z}\partial\bar{\partial} + \frac{1}{4(\bar{z}z)^2} v^2$. Очевидно, что $[h_l, P_n] = [v, P_n] = vP_0 = 0$, $v\Psi_n = n\Psi_n$. Кроме того, операторы P_n, v и $-ih_l$ эрмитовы для достаточно быстро убывающих функций.

Можно поставить задачу о нахождении волновых функций описывающих рассеяние заряженной частицы в глобальном пространстве расслоения, налетающей с импульсом $\mathbf{k}$ на монополь [8].

Введем для импульсов $\mathbf{k}$ такое же расслоение как и P, то есть $(q,\bar{q}) \in \mathbb{C}^2\setminus 0$, $k_l = \bar{q}\,\sigma_l q$, которое обозначим через P^*. Тогда, учитывая калибровочную инвариантность и инвариантность относительно вращений $SU(2)$-системы заряд-монополь [4, 5], легко видеть, что волновая функция определенная на $P\times P^*$, должна зависеть только от переменных типа $\bar{q}z$, $\bar{z}q$ и $\bar{q}q\bar{z}z$ [1)]. Уравнение $(E + \frac{h_l h_l}{2\mu})\Psi = 0$, при $E = \frac{k^2}{2\mu} = \frac{(\bar{q}q)^2}{2\mu}$ редуцируется к уравнению:

$$(\partial_\rho^2 + \frac{2}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}[(1-\bar{\epsilon}\epsilon)\,\partial_\epsilon\partial_{\bar{\epsilon}} - \frac{1}{2}(\epsilon\partial_\epsilon + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{\epsilon}})] + 1)\Psi = 0, \tag{7}$$

где $\rho = \bar{q}q\bar{z}z$, $\epsilon = \bar{q}z/\sqrt{\rho}$, $\bar{\epsilon} = q\bar{z}/\sqrt{\rho}$. Его решение при $n \geqslant 0$

$$\Psi_{nq\bar{q}} = \sum_{l=0}^{\infty} e^{i\alpha(l,n)}\,\epsilon^{|n|}(l + \frac{|n|+1}{2})\sqrt{\frac{2\pi}{\rho}}\,J_{\nu(l,n)}(\rho)\,P_l^{(0,|n|)}(2\bar{\epsilon}\epsilon - 1), \tag{8}$$

при $n < 0$ вместо $\epsilon^{|n|}$ стоит $\bar{\epsilon}^{|n|}$; $\nu(l,n) = ((l + \frac{|n|+1}{2})^2 - \frac{n^2}{4})^{1/2}$ [2)]. Числа $\alpha(l,n) = \frac{\pi}{2}(2l - \nu(l,n) + \frac{1}{2})$ найдены из условия отсутствия сходящейся волны в (8). Асимптотическое поведение (8) при $r = \bar{z}z \to \infty$ дается формулой

$$\Psi_{nq\bar{q}} \approx \epsilon^{|n|}[e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \frac{1}{r}\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l + \frac{|n|+1}{2})}{ik}(e^{i\pi(l-\nu(l,n)+1/2)} - 1)P_l^{(0,|n|)}(2\bar{\epsilon}\epsilon - 1)\Big)e^{ikr}], \tag{9}$$

определяющей амплитуду рассеяния $f_n(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{l + \frac{|n|+1}{2}}{ik}\cos^{|n|}\frac{\theta}{2}(e^{i\pi(l-\nu(l,n)+1/2)} - 1)P_l^{(0,|n|)}(\cos\theta)$.

Нетрудно проверить, что

$$\int \Psi^*_{nq\bar{q}}\,\Psi_{mq'\bar{q}'}\,dV = (2\pi)^3\delta_{nm}\,\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{10}$$
$$k_i = \bar{q}\,\sigma_i q, \qquad k_i' = \bar{q}'\sigma_i q'.$$

---

1) Группы $SU(2)$ и $U(1)$ действуют на $P\times P^*$ диагональным образом, а именно $g: P\times P^* \to gP\times gP^*$, где $g \in U(1)$ или $SU(2)$.

2) $P_l^{(0,n)}(\beta) = \frac{(-i)^l}{2^l l!}(1+\beta)^{-n}\frac{d^l}{d\beta^l}((1-\beta)^l(1+\beta)^{l+n})$ – полином Якоби, $P_l^{(0,0)} = P_l$; $J_{\nu(l,n)}$ – функция Бесселя.

Таким образом задача рассеяния на монополе эффективно решается с использованием удвоенного расслоения $P \times P^*$ и редукции (7).

Автор глубоко благодарен И.С. Шапиро за постановку задачи, а также М.А. Соловьеву за полезные обсуждения.

Литература

1. *Wu T.T., Yang C.N.* Phys. Rev., 1975, **D12**, 3845.
2. *Wu T.T., Yang C.N.* Nucl. Phys., 1976, **B107**, 365.
3. *Trautman A.* Int. J. Theor. Phys., 1977, **16**, 561.
4. *Соловьев М.А.* Письма в ЖЭТФ, 1984, **39**, 582.
5. *Horvathy P.A.* Int. J. Theor Phys., 1981, **20**, 697.
6. *Greub W., Petry H.R.* J. Math. Phys., 1975, **16**, 1347.
7. *Соловьев М.А.* Письма в ЖЭТФ, 1982, **36**, 546.
8. *Petry H.R.* Lect. Notes. Math., 1980, **836**, 406.

Физический институт им. П.Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 ноября 1987 г.