

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНОГО ОДНОМЕРНОГО ПРОВОДНИКА

Б.Л. Альтшулер, В.Н. Пригодин

Определена частотная зависимость проводимости неупорядоченной одномерной системы конечного размера z . Показано, что статическая диэлектрическая проницаемость открытого образца пропорциональна z^2 и гораздо больше, чем в бесконечной системе. В зависимости от времени t поляризация образца сначала растет как $\ln^3 t$, а потом релаксирует к классическому значению как $\exp[-\frac{1}{z} \ln^2 t]$. Такого типа релаксация, по-видимому, характерна и для металла и для диэлектрика при произвольной размерности.

Известно, что остаточная статическая проводимость одномерного неупорядоченного проводника экспоненциально падает с ростом его длины z , а проводимость $\sigma(\omega)$ на малой, но конечной частоте ω при $z \rightarrow \infty$ оказывается в основном мнимой и линейной по ω . Эти законы, для справедливости которых нужна только локализация электронных состояний,

в одномерном случае следуют из точного решения задачи. Здесь мы обсудим вопрос о проводимости при одновременно конечных ω и z . При этом взаимодействие между электронами учитываться не будет.

Пределные переходы $\omega \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$ оказываются нетривиальными. Например, диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega) = 4\pi \text{Im}\sigma(\omega)/\omega$ в диэлектрике при $z = \infty$ и $\omega \rightarrow 0$ конечна и пропорциональна квадрату длины локализации. Однако при $\sigma(0) \neq 0$, когда электрон может перейти с одного локализованного состояния на другое, за достаточно большое время образец поляризуется целиком. Это значит, что $\epsilon(0)$ такая же, как в металле с той же плотностью состояний, то есть $\epsilon(0) \propto z^2$. Частотная зависимость проводимости должна описать переход от малого "диэлектрического" значения при малых временах t до "металлического" значения при $t \rightarrow \infty$.

Для определения $\sigma(\omega)$ в конечном одномерном образце с открытыми границами мы воспользуемся техникой Березинского¹, в которой

$$\frac{\sigma(0)}{\sigma_0} = \frac{2}{z l_2} \int_0^z dx \int_x^z dy \sum_{m, m'=0}^{\infty} [L_{m+1}(x) - L_m(x)] Z_{m, m'}(x, y) \times [L_{m'+1}(y-z) - L_{m'}(y-z)], \quad (1)$$

здесь σ_0 — друдевская проводимость (с учетом спинового вырождения $\sigma_0 = 2e^2 l_2 h^{-1}$), l_2 — длина свободного пробега по отношению к рассеянию назад. Функции L_m и $Z_{m, m'}$, описывающие левую (правую) и центральную части диаграмм для проводимости удовлетворяют уравнениям¹:

$$(ms + \frac{d}{dx}) L_m = m^2 (L_{m+1} + L_{m-1} - 2L_m), \quad (2)$$

$$[(m + \frac{1}{2})s - \frac{d}{dx}] Z_m = (m+1)^2 (Z_{m+1} - Z_m) - m^2 (Z_m - Z_{m-1}), \quad (3)$$

где $s = -2i\omega l_2 v_F^{-1}$, v_F — скорость Ферми, а все длины определены в единицах l_2 . Граничные условия для (2), (3) на открытых границах имеют вид^{2,3}:

$$L_m(x=0) = \delta_{m,0}; \quad Z_{m, m'}(x=y) = \delta_{mm'}. \quad (4)$$

При существенных для низких частот ($s \ll 1$) больших m и m' решение уравнения (2) можно найти с помощью преобразования Лапласа

$$L_m(x) = m^{1/2} \int_{-\infty+i(1+0)}^{\infty+i(1+0)} \frac{d\lambda}{\pi} \varphi(\lambda) s^{-i\lambda/2} \exp(-x \frac{1+\lambda^2}{4}) K_{i\lambda} [2(ms)^{1/2}], \quad (5)$$

где $\varphi(\lambda) = \frac{1}{8} \Gamma^3(-i\lambda/2 - 1/2) \Gamma^{-2}(-i\lambda - 1)$, $K_{i\lambda}(\xi)$ — функция Бесселя. Решение (3) дается преобразованием Лебедева — Канторовича

$$Z_{m, m'}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma sh \pi \gamma d\gamma}{2\pi^2 (mm')^{1/2}} K_{i\gamma} [2(ms)^{1/2}] K_{i\gamma} [2(m's)^{1/2}] \times \exp[-|x-y| \frac{1+\gamma^2}{4}]. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (1), получим:

$$\frac{\sigma(\omega)}{\sigma_0} = [\int_{C_1} (1+i\lambda_1^{-1}) + \int_{C_2} (1+i\lambda_1^{-1})] d\lambda_1 [\int_{C_1} (1+i\lambda_2^{-1}) +$$

$$+ \int_{C_2} (1 - i\lambda_2^{-1})] d\lambda_2 s^{-t(\lambda_1 + \lambda_2)/2} \times$$

$$\times \frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)}{z(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \frac{[\psi(\lambda_1^2 - \gamma^2) - \psi(\lambda_2^2 - \gamma^2)] \text{sh}\pi\gamma}{(\text{ch}\pi\lambda_1 - \text{ch}\pi\gamma)(\text{ch}\pi\lambda_2 - \text{ch}\pi\gamma)} \exp(-z \frac{1 + \gamma^2}{4}), \quad (7)$$

где $\psi(u) = [\exp(-zu/4) - 1]/u$, а контуры интегрирования $C_{1,2}$ показаны на рис. 1. В пределе $z \rightarrow \infty$ основной вклад в $\sigma(\omega)$ при интегрировании по $\lambda_{1,2}$ дает полюс $\lambda = i$, что приводит к известному результату¹:

$$\sigma(\omega) = 4\pi s \sigma_0 \int_0^{\infty} (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 + 1)^{-2} (\text{ch} \frac{\pi\gamma}{2})^{-2} d\gamma =$$

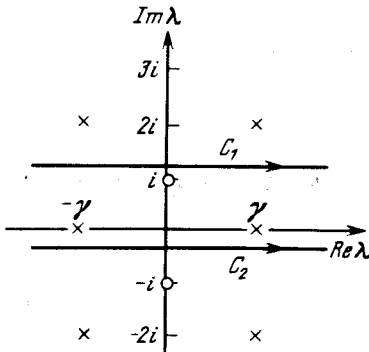
$$= -8i\xi(3)e^2 \omega l_2^2 (v_F \hbar)^{-1}. \quad (8)$$

При конечном z и $\omega \rightarrow 0$ $\sigma(\omega)$ определяется полюсами $\lambda = 2in \pm \gamma; n = 0, 1, 2 \dots$

$$\frac{\sigma(\omega)}{\sigma_0} = \left(\frac{\pi^5}{z}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{z}{4}\right) - \frac{\omega i}{6v_F} l_2 z^2 -$$

$$- \frac{z}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2i\omega l_2}{v_F}\right)^n \Gamma^6\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{\exp\left(z \frac{n^2 - 1}{4}\right)}{n(n-1)\Gamma^4(n)}. \quad (9)$$

Первый член в (9) определяет статическую проводимость², а второй — статическую диэлектрическую проницаемость $\epsilon(0) = (4\pi e^2/hv_F)(l_2 z)^2$, которая не зависит от беспорядка, а определяется только плотностью состояний $2/hv_F$ и размером образца $l_2 z$. Третий член в правой части (9) описывает переход от (8) к этому значению. Этот переход естественно рассмотреть во временном представлении.



Контуры интегрирования C_1 и C_2 в уравнении (7). При $\omega \rightarrow 0$ и $z = \text{const}$ $C_{1,2}$ нужно сместить на $+i\infty$, и основной вклад обеспечивает серия полюсов, показанных крестиками. В другом пределе $\omega = \text{const}$, $t \rightarrow \infty$ C_1 и C_2 следует опустить на действительную ось, и основной вклад в $\sigma(\omega)$ дает полюс $\lambda = i$.

Обсудим временную зависимость дипольного момента образца $d(t)$ после включения при $t = 0$ электрического поля E . Согласно (9) при $t \exp(-\frac{z}{2}) \ll \exp(z^{1/2})$

$$\frac{d(t)}{d(\infty)} = 1 - \delta(t); \quad \delta(t) = \frac{6}{(\pi z^3)^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{2\Lambda}\right)^2 \frac{\Gamma^6(1 + \Lambda)}{\Gamma^3(2 + 2\Lambda)} \exp(-z\Lambda^2), \quad (10)$$

$$d(\infty) = \sigma_0 E z^3 \frac{l_2^2}{6v_F} = \frac{e^2 E}{3v_F \hbar} (z l_2)^3; \quad \Lambda = \frac{\ln t}{z} - \frac{1}{2} = \frac{1}{z} \ln(t e^{-z/2}), \quad (11)$$

где t измерено в единицах $2l_2 v_F^{-1}$. Итак, $d(t)$ релаксирует к $d(\infty)$ при $t \rightarrow \infty$ "логарифмически-нормальным" образом: быстрее любой степени t , но медленнее, чем по экс-

по экспоненциальному закону. Основной рост $d(\infty)$ происходит при $t \ll \exp(z/2)$. Если $t \ll \exp(z/2 - z^{1/2})$, то

$$d(t) = 8z^{-3}d(\infty)(\ln^3 t + 6\ln^2 t) - d(\infty)\delta(t). \quad (12)$$

Видно, что $d(t)$ растет как $\ln^3 t$ и не зависит от z . Это естественно объясняется: за время t успевают поляризоваться по закону (11) лишь приграничные части образца размером порядка $\ln t$. Сравнение (12) с дипольным моментом, соответствующим формуле Березинского (8)

$$d_0(t) = \frac{4\zeta(3)z l_2^2}{v_F} \sigma_0 E = 24\zeta(3)z^{-2}d(\infty) \quad (13)$$

показывает, что все результаты, полученные для бесконечного образца справедливы только при $3\zeta(3)z \gg \ln^3 t$, то есть при $t \ll \exp([3\zeta(3)z]^{1/3})$.

Формулы (10) и (12) справедливы при $\Lambda^2 \gg \frac{1}{z}$. В то же время, если $\Lambda^2 \ll 1/4$, то $d(t)$ описывается выражением

$$\frac{d(t)}{d(\infty)} = 1 + [8z^{-3}(\ln^3 t + 6\ln^2 t) - 1] \Phi(-z^{1/2}\Lambda) - \frac{3}{(\pi z)^{1/2}} \exp(-z\Lambda^2) \quad (14)$$

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \exp(-w^2) dw / \pi^{1/2}; \quad \Phi(0) = \frac{1}{2},$$

которое совпадает с (10), (12) в общих областях применимости.

Тот же метод позволяет проследить за распылением электронной плотности в конечном образце. Если при $t = 0$ электрон находится в точке y , то вероятность обнаружить его в точке x в момент времени t равна

$$P(x, y; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{8\pi i l_2} e^{st} \sum_{m, m'=0}^{\infty} [L_{m+1}(x) + L_m(x)] Z_{m, m'}(x, y) [L_{m'+1}(z-y) + L_{m'}(z-y)]. \quad (15)$$

Подставляя (5) и (6) в (15), получим при $x = y = z/2$

$$P(t) = \frac{1}{3l_2} \int_{C_1} \frac{d\lambda}{2\pi} \int_{C_2} \frac{d\gamma}{2\pi} \varphi(\lambda + \gamma) \varphi(\lambda - \gamma) |\Gamma(2 + i\gamma)|^2 \Gamma(2 - i\lambda) t^{1+i\lambda} \exp\left(-z \frac{1 + \lambda^2 + \gamma^2}{4}\right). \quad (16)$$

При $e^{-z/2}t \ll 1$ основной вклад в (15) вносит полюс $\lambda = i \pm \gamma$. Это приводит к известному результату $P(t) = (3l_2)^{-1} [1 + 0(t^{-3})]^{1, 4, 5}$. При $e^{-z/2}t \gg 1$ интеграл (15) определяется перерывальным значением $\lambda = i(2\Lambda + 1)$

$$P(t) = \frac{1}{3l_2} \frac{1}{\pi z} \Gamma(3 + 2\Lambda) \varphi^2(i + 2i\Lambda) \exp(-z\Lambda^2). \quad (17)$$

Долговременная релаксация (10) и (17) означает, что время выхода электрона из образца — величина случайная и распределена по логарифмически нормальному закону. Типичное значение этой величины $\eta^{-1} \sim \exp(\alpha x)$, где x — расстояние до ближайшей границы, а α — обратный радиус локализации. Естественное предположение о нормальном распределении величины α приводит к логарифмически нормальному распределению ширины уровня η и времени ухода частицы из образца η^{-1} .

Это распределение ширин уровней позволяет объяснить и логарифмически нормальное распределение локальной плотности состояний³.

“Логарифмически нормальная релаксация” (10) и закон роста $\exp(zn^2/4)$ коэффициентов разложения в ряд функции $\sigma(\omega)$ (9) очень хорошо согласуется с результатами работ⁶,

в которых в металлической области при произвольной размерности эти же величины изучались методом эффективной теории поля (расширенной нелинейной σ -модели). Были обнаружены законы, отличающиеся от (9), (10) заменой в показателях экспонент z на величину, пропорциональную $\ln[\sigma_0/\sigma(0)]$. Такое же соответствие было обнаружено ранее для функции распределения плотности состояний^{3, 6}. Долговременная релаксация и хвосты плотности распределения мезоскопических флуктуаций в металле и в диэлектрике очень похожи. Нам это представляется естественным: нетипичные реализации случайного потенциала, формирующие эти асимптотики, слабо чувствуют переход металл—диэлектрик.

Мы благодарны В.Е. Кравцову и И.В. Лернеру за ценные обсуждения.

Литература

1. Березинский В.Л. ЖЭТФ, 1973, 65, 1251.
2. Абрикосов А.А., Рыжкин И.А. ЖЭТФ, 1976, 71, 1204.
3. Альтшулер Б.Л., Пригодин В.Н. Письма в ЖЭТФ, 1987, 45, 538.
4. Гоголин А.А., Мельников В.И., Рашба Э.И. ЖЭТФ, 1975, 69, 327.
5. Нахмедов Э.П., Пригодин В.Н., Фирсов Ю.А. ЖЭТФ, 1987, 92, 2133.
6. Альтшулер Б.Л., Кравцов В.Е., Лернер И.В. Письма в ЖЭТФ, 1987, 45, 160; ЖЭТФ, 1988, 94, 3; ЖЭТФ, 1986, 91, 2276.

Ленинградский институт ядерной физики
Академии наук СССР
Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
30 октября 1987 г.