Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 1, стр. 8 – 10 *10 июля 1987 г.*

ЯВНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ДВУХПЕТЛЕВОЙ МЕРЫ В МОДЕЛИ ГЕТЕРОТИЧЕСКИХ СТРУН

В.Г.Книжник

Явно вычислена двухпетлевая вакуумная диаграмма в модели гетеротических суперструн. Показано, что после суммирования по граничным условиям мера обращается в нуль.

Задача вычисления многопетлевых амплитуд в теории суперструн в последнее время привлекла к себе большое внимание. В [1] на основании однопетлевых вычислений была выдвинута гипотеза об отсутствии расходимостей в теории замкнутых ориентированных суперстру во всех порядках теории возмущений. Однако, несмотря на значительные усилия, эта гипотеза не получила пока удовлетворительного подтверждения в виду отсутствия сколько-нибудь явных формул для многопетлевой меры в суперструне, которые позволили бы проследить отсутствие расходимостей. В настоящей работе будут представлены явные формулы для двухпетлевой меры в теории гетеротических струн при фиксированных граничных условиях на фермионы на мировом листе. Будет также показано, что выбор модели и условия факторизации однозначно фиксируют знаки при вкладах от различных граничных условий. В результате, в суперсимметричных моделях суммарная мера обращается в нуль.

Основная трудность при вычислении многопетлевых амплитуд в суперструне связана с существованием нулевых мод духов со спином 3/2 и соответствующих им супермодулей. Мы используем анзатц работы [2], формула (43), в которой результат интегрирования по супермодулям представляется корреляционной функцией соответствующего числа операторов изменения духового заряда $Q\xi$, введенных в работе [3] Поверхности рода два мы будем задавать уравнением

$$y^2 = (z - a_1) \ldots (z - a_6) \tag{1}$$

в $C^2 = (y, z)$. Координатами в пространстве модулей служат координаты точек ветвления с точностью до действия группы $SL(2,C)$ проективных преобразований и перестановок. Мы будем вычислять меру как функцию этих координат. Известно, что для поверхностей (1) граничные условия на фермионы, при которых у оператора Дирака нет нулевых мод (только такие и дают ненулевой вклад в статсумму) параметризуются разбиениями точек $a_1, \ldots, a_6$ на тройки A_1^t, A_2^t, A_3^t и B_1^t, B_2^t, B_3^t ; $t = 1, \ldots, 10$. С помощью результатов работ [4,5], в которых было показано, что точкам ветвления соответствуют вершинные операторы, вклад в меру для гетеротической струны с граничными условиями r и s на две группы из 16 левых фермионов и условиями t на правые фермионы можно записать в виде

$$\Lambda_2(r, s, t) = \int \prod_{i=1}^{6} d^2 a_i / dV_{pr}\, T^{-5} \prod_{k<l}^{6} (\bar{a}_k - \bar{a}_l)^{-3} (a_k - a_l)^{-2} \cdot$$

$$\prod_{i<j}^{3} (\bar{A}_i^r-\bar{A}_j^r)^2 (\bar{B}_i^r-\bar{B}_j^r)^2 (\bar{A}_i^s-\bar{A}_j^s)^2(\bar{B}_i^s-\bar{B}_j^s)^2 (A_i^t-A_j^t) (B_i^t-B_j^t) W_t;$$

$$W_t \equiv \langle \xi(x_0)Q\xi(x_1)Q\xi(x_2)\rangle_t , \tag{2}$$

где

$$T=\int d^2z_1d^2z_2 \mid (z_1-z_2)\ y^{-1}(z_1)\ y^{-1}(z_2)\mid^2 ,$$

а коррелятор W_t будет вычислен ниже. С помощью аргументов работы [3] можно показать, что (2), с точностью до полных производных по a_i, не зависит от выбора точек x_i. Удобно положить $x_0=\infty$, $x_1=a_1$ и $x_2=a_2$. Кроме того, мы будем считать, что $a_1=A_1^t$ и $a_2=A_2^t$, если обе точки находятся в одной тройке и $a_1=A_1^t$, $a_2=B_1^t$, если в разных. После некоторых вычислений получаем:

$$W_t=W_t^X+W_t^{gh} , \tag{3}$$

где вклад от спин-токов "материи" имеет вид

$$W_t^X=-\frac{5}{8}\ (a_1-a_2)^{-1}\ T^{-1}\ \{\ (a_2-a_3)\ \dots (a_2-a_6)\int d^2z_1d^2z_2\ \cdot$$

$$\frac{(a_1-z_1)(a_1-z_2)}{(a_2-z_1)(a_2-z_2)}\left|(z_1-z_2)y^{-1}(z_1)y^{-1}(z_2)\right|^2+(a_1\longleftrightarrow a_2)\ \} \tag{4}$$

и не зависит от t, а духовая часть

$$W_t^{gh}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}(a_1-a_2)^{-1}(a_1-A_3^t)(a_1-B_i^t)(a_2-B_{i+1}^t)(a_2-B_{i+2}^t) \tag{5а}$$

при $a_2=A_2^t$ и

$$W_t^{gh}=\frac{1}{4}\ (a_1-a_2)^{-1}\ (a_1-A_2^t)(a_1-A_3^t)(a_2-B_2^t)(a_2-B_3^t) \tag{5б}$$

при $a_2=B_1^t$.

Подставляя эти формулы в (2), мы получаем вклад в двухпетлевую меру от сектора с граничными условиями (r, s, t).

Осталось выбрать весовые множители $C(r, s, t)=\pm 1, 0$ с которыми $\Lambda_2(r, s, t)$ входят в полную статсумму

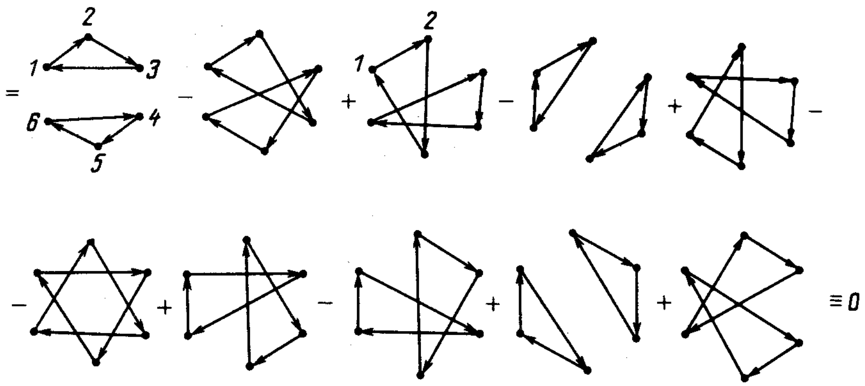
$$\Lambda_2=\sum_{r,\ s,\ t} C(r,s,t)\ \Lambda_2(r,s,t)\ . \tag{6}$$

Конкретные значения $C(r, s, t)$ определяются выбором модели и условиями факторизации [6] Так, для $SO(32)$ суперструны

$$C(r,s,t)=\delta_{r,s}C(t)\ , \tag{7}$$

где знаки $C(t)$ могут быть найдены из условий сокращения полюсов в (2) при $a_k\to a_l$. Оказывается, что существует единственный выбор знаков, удовлетворяющий этому условию. При этом вклад в меру от членов с W^X пропорционален

$$\sum_t C(t) \prod_{i<j} (A_i^t - A_j^t)(B_i^t - B_j^t) =$$



(8)

где стрелки $i \to j$ соответствуют сомножителям $(a_i - a_j)$ и каждая картинка обозначает произведение 6 сомножителей, соответствующих проведенным стрелкам. Духовая часть меры строится с помощью формул (5) и при приведенном выборе знаков также обращается в нуль. Для вывода этих тождеств мы проверили, что в обоих случаях число нулей по аргументу a_6 у полинома, представляющего тождество, превышает его степень по a_6. При этом удобно пользоваться графическим представлением (8). Отметим, что (8) является вариантом тождества Римана $\sum_m C(m)\,\theta_m^4 = 0$, однако, сокращение духового вклада происходит вследствие более сложного тождества, обобщение которого на случай большего рода нам неизвестно.

Для $E_8 \times E_8$ модели суммирование по граничным условиям r и s происходит независимо

$$C(r, s, t) = C(t) \tag{9}$$

и Λ_2 по-прежнему обращается в нуль. В итоге, для обеих суперсимметричных моделей

$$\Lambda_2 = 0 \tag{10}$$

в согласии с гипотезой [1].

В заключение отметим, что анзатц работы [2] для меры был также использован в [7], авторам которой, однако, не удалось проследить сокращение (10).

Литература

1. *Green M.B., Schwarz J.H.* Phys. Lett., 1982, **109B**, 444.
2. *Martinec E.* Nucl. Phys.. B, 1987, **281**, 157.
3. *Friedan D., Martinec E., Shenker S.* Phys. Lett., 1985, **160B**, 55.
4. *Bershadsky M., Radul A.*. Int. J. of Mod. Phys. A, 1987, **2**, 165.
5. *Knizhnik V.G.* Comm. Math. Phys., 1987 in press.
6. *Seiberg N., Witten E.* Nucl. Phys..B, 1986, **276**, 272.
7. *Verlinde E., Verlinde H.* Multiloop calculations in covariant superstring theory, Utrecht Preprint, Jan. 1987.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21 мая 1987 г.