Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 2, стр. 72 – 74 *25 июля 1987 г.*

ЭЙЛЕРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ДИСКОТИКАХ

В.Г.Каменский, Е.И.Кац

Показано, что в дискотических жидких кристаллах при растяжении или сжатии возникает неустойчивость приводящая к деформации дискотических нитей. Найден порог неустойчивости и простейший период модуляции.

Явление упругой неустойчивости твердого стержня, подвергутого воздействию сжимающих сил (эйлеровская неустойчивость), заключается в том, что при достижении некоторого критического значения сжимающей силы прямолинейная форма стержня отвечает неустойчивому равновесию. Достаточно уже бесконечно малого воздействия для того, чтобы равновесие нарушалось, и стержень изогнулся.

В слоистых жидких кристаллах (холестериках и смектиках) существует похожее явление, возникающее при их растяжении в перпендикулярном слоям направлении [1]. При достижении некоторого критического значения растяжения плоские слои становятся неустойчивыми и возникает так называемая волнообразная модуляция. Хотя формальное описание этой неустойчивости, выполненное Хельфрихом [2], похоже на описание эйлеровской неустойчивости в твердых стержнях, физические причины этих явлений совершенно различны. Фактически волнообразная модуляция в холестериках и смектиках связана с отсутствием модуля относительного сдвига слоев (т. е. с мягкостью коррелятора смещений слоев). Различны и проявления обеих неустойчивостей. Так эйлеровская неустойчивость стрежня соответствует одномерной модуляции, в то время как неустойчивость Хельфриха приводит к двумерной модуляции слоев и образованию квадратной решетки [2].

В настоящее время волнообразная неустойчивость в смектиках и холестериках хорошо изучена и имеет многочисленные приложения [3].

Однако физические причины неустойчивости (мягкость коррелятора смещений) существуют и в наиболее твердотельном классе жидких кристаллов – дискотиках, структура которых описывается двумерной решеткой жидких нитей. Как будет показано ниже, при растяжении этой решетки свыше определенного порога, возникает одномерная модуляция нитей. В этом смысле неустойчивость нитей дискотика больше похожа на эйлеровскую неустойчивость, чем волнообразная модуляция в смектиках и холестериках. Укажем также, что неустойчивость прямолинейных нитей в дискотиках, как и волнообразная модуляция может быть вызвана действием магнитного поля.

Рассмотрим статическую устойчивость прямолинейных нитей наиболее распространенной модификации гексагональных дискотиков. Упругую энергию дискотиков удобно описывать двумя скалярными функциями W_1, W_2, имеющими смысл фаз модуляции плотности в двух направлениях [4]. В силу своего определения W_1, W_2 таковы, что система двух уравнений $W_{1,2}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{const}$ задает положение в пространстве и эволюцию во времени некоторой дискотической нити. В силу этого свойства единичный вектор $\vec{\nu} = [\nabla W_1 \times \nabla W_2]/|[\nabla W_1 \times \nabla W_2]|$ направ... вдоль нити.

Разложение энергии по градиентам W_i должно удовлетворять следующим свойствам: а) быть вращательно инвариантным, б) быть инвариантным относительно элементов симметрии решетки (при этом следует иметь в виду, что вращение решетки не затрагивает индекс у W_i). В гексагональных дискотиках эти правила фиксируют следующий вид разложения энергии с точностью до членов четвертого порядка по ∇W_i

$$E_W = \frac{B_t - B_l}{4q^2} (\nabla W_i)^2 + \frac{(B_l - 2B_t)}{8q^4} (\nabla W_i \nabla W_i)^2 + \frac{B_t}{4q^4} (\nabla W_i \nabla W_j)^2 + \frac{K}{2q^2} (\nabla^2 W_i)^2 \qquad (1)$$

где B_t, B_l – поперечный и продольный модули упругости решетки дискотических нитей, q – волновый вектор гексагональной дискотической модуляции плотности, K – модуль Франка.

Минимум энергии (1) достигается на решении

$$W_{10} = qx, \qquad W_{20} = qy. \qquad (2)$$

Два уравнения $W_1 = \mathrm{const}$, $W_2 = \mathrm{const}$ с W_i (2) описывают систему нитей, параллельных оси z. Соответственно и вектор $\vec{\nu}$ направлен вдоль этой же оси. При деформации системы нитей функции W_i становятся отличными от (2). Для описания такой деформации введем следующие обозначения

$$W_1 = q(x - U_x), \qquad W_2 = q(y - U_y). \qquad (3)$$

Для малых отклонений от равновесия вектор U_α совпадает со смещением нитей вдоль осей x, y. Подставляя (3) в (1), получаем гармоническую упругую энергию дискотика $E_W^{(0)}$ и главные ангармонические члены третьего порядка $E_W^{(1)}$:

$$E_W^{(0)} = \frac{B_l}{2} (\nabla_\alpha U_\alpha)^2 + \frac{B_t}{2} (\epsilon_{\alpha\beta} \nabla_\alpha U_\beta)^2 + \frac{K}{2} (\nabla^2 U_\alpha)^2, \qquad (4)$$

$$E_W^{(1)} = -\frac{(B_l - 2B_t)}{2} \nabla_\alpha U_\alpha (\nabla U_\beta)^2 - B_t \nabla_\alpha U_\beta \nabla U_\alpha \nabla U_\beta, \qquad (5)$$

где $\epsilon_{\alpha\beta}$ – двумерный антисимметричный тензор.

Исследуем теперь (4), (5) на устойчивость относительно простейшего типа деформаций

$$U_\alpha = \gamma x_\alpha + u_\alpha \cos k_z z \sin k_x x \sin k_y y. \qquad (6)$$

Параметр γ соответствует растяжению решетки нитей, u_α – возмущение прямолинейных нитей, $k_z \equiv k$ – волновой вектор этого возмущения, волновые вектора k_x, k_y определяются размером образца и граничными условиями. В простейшем случае квадратного сечения образца, вырезанного вдоль осей x, y размером L, из условий $u_\alpha(0) = u_\alpha(L) = 0$ имеем $k_x = k_y = \pi/L = q_0$. Подставляя (6) в (4), (5) получим следующее выражение для квадратичных по u_α членов в упругой энергии

$$E = \frac{B_l q_0^2}{2}(u_x + u_y)^2 + \frac{B_t q_0^2}{2}(u_x - u_y)^2 + \frac{Kk^4}{2}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{\gamma k^2}{2}(B_l - 4B_t)(u_x^2 + u_y^2). \quad (7)$$

В принципе возможны различные типы возмущения дискотических нитей. Легко увидеть, однако, что первая неустойчивость является симметричной (т. е. $u_x = u_y$). При этом прямолинейные нити теоряют устойчивость при

$$\gamma \geqslant \gamma_c = \frac{(B_l + B_t)q_0^2 + Kk^4}{(B_l - 4B_t)k^2}. \quad (8)$$

Важное отличие этого результата от случая смектиков и холестериков заключается в том, что в дискотиках неустойчивость прямолинейных нитей может иметь место как при растяжении (если $B_l > 4B_t$), так и при сжатии (если $B_l < 4B_t$).

Период модуляции нити вблизи порога неустойчивости может быть найден как обычно, минимизацией (8) по k

$$k_c = [(B_l + B_t)q_0^2/K]^{1/2}. \quad (9)$$

Отметим, в заключение, что тип возникающей неустойчивости и характер ее развития будут сильно зависеть от вида начального возмущения и формы образца. Эти вопросы и динамика развития неустойчивости будут изложены в отдельной работе.

Литература

1. *Де жен П.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977.
2. *Helfrich W.* Appl. Phys. Lett., 1970, **17**, 531.
3. *Kahn F.* Appl. Phys. Lett., 1973, **22**, 111.
4. *Кац Е.И., Лебедев В.В.* ЖЭТФ, 1984, **86**, 558.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 мая 1987 г.