Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 4, стр. 125 – 129 *25 августа 1987 г.*

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ В ТЕОРИИ СУПЕРСТРУН. РОД 2

А.Морозов, А.Переломов

Доказано зануление двухпетлевого вклада в статистическую сумму после суммирования по спинорным структурам.

Обращение в нуль статистических сумм гетеротической и суперсимметричной струн является необходимым условием десятимерной суперсимметрии и конечности этих теорий в рамках пертурбативного разложения. К сожалению, доказательство этого важнейшего свойства натолкнулось на значительные трудности и до сих пор отсутствует. (Имеющиеся рассуждения весьма общего характера, см., например, [1], кажутся слишком неявными). Ранее [2] была высказана гипотеза, о том, что зануление вакуумной энергии обеспечивается в каждом порядке теории возмущений соответствующими тождествами Римана для тета-функций. Наша цель в этой статье – уточнить это утверждение и доказать его в двухпетлевом приближении.

1. Основным объектом, определяющим p-петлевые статистические суммы, является сумма по всем (четным и нечетным) θ-характеристикам e [3–5]

$$\Phi = \sum_e \epsilon_e d\mu_e^{ss} \langle S_1 \ . \ . \ . \ S_{2p-2} \rangle, \tag{1}$$

где $d\mu_e^{ss} = \Lambda_0^{-5} \Lambda_2 \Lambda_{1/2}^5 [e] \Lambda_{3/2}^{-1} [e] = \det^{-5} \bar{\partial}_0 \det_e^5 \bar{\partial}_{1/2} \det \bar{\partial}_2 \det_e^{-1} \bar{\partial}_{3/2}$, $S_\alpha = \int_{S_p} \chi_\alpha(\psi\partial x + s_{ghost})$; $\alpha = 1 \ . \ . \ . \ 2p-2$; χ_α – нулевые моды поля гравитино.

P-петлевая статистическая сумма гетеротической струны получается умножением $\bar{\Phi}$ на меру Мамфорда $d\mu_{bos}$, на модулярную форму веса 16 – p-петлевую тета-функцию решетки $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ или Γ_{16} (см., например, [3]), на неголоморфный множитель $(\det N_1)^{-5}$, и интегрированием по пространству модулей M_p. В выражениях для амплитуд вершинные операторы вводятся, в частности, в коррелятор, стоящий в формуле (1). Для полного доказательства суперсимметрии и конечности теории необходимо рассмотреть суммы таких более громоздких корреляторов. Здесь мы не будем обсуждать амплитуды.

Вернемся к формулам (1). Знаковые множители $\epsilon_e = \pm 1$ могут быть определены, если задана некоторая нечетная θ-характеристика e_*. Тогда $\epsilon_e = \langle e_*, e \rangle$. Модулярно инвариантное скалярное произведение θ-характеристик $e_1 = \begin{bmatrix} \vec{\delta}_1 \\ \vec{\epsilon}_1 \end{bmatrix}$ и $e_2 = \begin{bmatrix} \vec{\delta}_2 \\ \vec{\epsilon}_2 \end{bmatrix}$ определено по правилу $\langle e_1, e_2 \rangle = (-)^{\vec{\delta}_1 \vec{\epsilon}_2 - \vec{\delta}_2 \vec{\epsilon}_1}$. Нулевые моды гравитино χ_α дуальны некоторому набору голоморфных 3/2-дифференциалов ζ_β: $\int_{S_p} \chi_\alpha \zeta_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Этот же набор 3/2-дифференциалов входит в определение [6]

$$\det \bar{\partial}_{3/2} = \frac{\int D\eta D\zeta \prod_{\alpha=1}^{2p-2} \zeta(Q_\alpha) \exp \int \eta \bar{\partial} \zeta}{\det_{(\alpha\beta)} \zeta_\alpha (Q_\beta)} .$$

Появившийся в знаменателе детерминант сокращает зависимость от нормировки χ_α в (1).

Нулевые моды χ_α содержат еще произвол, связанный с калибровочными преобразованиями $\chi_\alpha \to \chi_\alpha + \bar\partial\epsilon_\alpha$, оставляющими χ_α дуальными набору $\{ \zeta_\beta \}$. В произвольной калибровке χ_α выражение для Ф, по-видимому, не обращается в нуль *до* интегрирования по пространству модулей. При калибровочных преобразованиях подынтегральное выражение изменяется на полную производную по пространству модулей [1]. Пользуясь калибровочным произволом, удобно выбрать χ_α в виде $\delta^{(2)}(z - Q_\alpha)\frac{d\bar z}{d\bar z^{1/2}}$, где Q_α – какие-то $2p-2$ точки на римановой поверхности рода p S_p. При таком выборе χ_α выражение (1), по всей видимости, неотличимо от представления [7], в котором вместо коррелятора $\langle S_1 \ldots S_{2p-2} \rangle$ в (1) стоит $\langle \xi(Q_0) Q\xi(Q_1) \ldots Q\xi(Q_{2p-2}) \rangle$ (ξ – скалярное поле, Q – BRST оператор). Мы покажем, ниже, что при удачном выборе χ_α сумма Ф обращается в нуль сама по себе (по крайней мере для $p = 2$).

2. Используя уже введенную выше нечетную несингулярную θ-характеристику e_*, можно сильно упростить выражение для $\Lambda_j = \det^{1/2}\bar\partial_0 \det\bar\partial_j$ и определить удобный базис χ_α. Характеристика e_* определяет $p-1$ точку $R_1 \ldots R_{p-1}$ на римановой поверхности S_p: двойные нули голоморфного 1-дифференциала $\nu_*^2 = \theta_{*,i}\omega_i$. (Вообще, согласно теореме Римана $\theta_*(\mathbf{z}_1 + \ldots + \mathbf{z}_{p-1} - \mathbf{R}_1 - \ldots - \mathbf{R}_{p-1}) \equiv 0$ для всех $z_1 \ldots z_{p-1}$ на S_p; $\mathbf{z} = \int^z \omega$ – отображение Якоби, $\omega_1 \ldots \omega_p$ – канонические голоморфные 1-дифференциалы на S_p).

Как показано в [6,8], если выбрать на S_p метрику Аракелова $|\nu_*|^4$, то

$$\Lambda_{3/2}[e] = \det{}^{1/2}\bar\partial_0 \det{}_e \bar\partial_{3/2} \sim \theta_e(\Sigma\,\mathbf{Q}_\alpha - 2\,\Sigma\,\mathbf{R}_i)/\det \zeta_\alpha(Q_\beta). \tag{2}$$

Известен также ответ для $\det_e \bar\partial_{1/2}$ (см. (4)).

Рассмотрим прежде всего вклад полей материи ψ и x в коррелятор спин-токов $\langle S_1 \ldots S_{2p-2} \rangle$:

$$\langle \psi\partial x(Q_1) \ldots \psi\partial x(Q_{2p-2}) \rangle_e / \det{}_e [\zeta_\alpha(Q_\beta)]. \tag{3}$$

Детерминант в знаменателе связан с нормировкой нулевых мод χ_α:

$$\delta^{(2)}(z - Q_\alpha)\,\frac{d\bar z}{d\bar z^{1/2}} = \sum_\beta \zeta_\alpha(Q_\beta)\chi_\beta(z).$$

Каждое поле ψ в (3) надо считать суммой двух полей $\psi = \tilde\psi + \tilde{\tilde\psi}$. Действие фермионов имеет вид $\int \tilde{\tilde\psi}\,\bar\partial\,\tilde\psi$ поэтому отличны от нуля только корреляторы с равным числом полей $\tilde\psi$ и $\tilde{\tilde\psi}$, причем

$$\det{}^{1/2}\bar\partial_0 \det{}_e \bar\partial_{1/2} \langle \tilde\psi(x_1) \ldots \tilde\psi(x_n)\tilde{\tilde\psi}(y_1) \ldots \tilde{\tilde\psi}(y_n) \rangle_e =$$

$$= \theta_e(\mathbf{x}_1 + \ldots \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_1 - \ldots - \mathbf{y}_n)\,\frac{\prod\limits_{i<j}^n E(x_i, x_j)E(y_i, y_j)}{\prod\limits_{i,j} E(x_i, y_j)} =$$

$$= \theta_e(0)\det{}_{(ij)}\,\frac{\theta_e(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j)/\theta_e(0)}{E(x_i, y_j)}; \tag{4}$$

E – бидифференциал Прима [9], $E(x, y) = \theta_*(\mathbf{x} - \mathbf{y})/\nu_*(x)\nu_*(y)$. Эта формула справедлива для любой, не обязательно четной несингулярной характеристики e.

"Лоренцевы" значки μ у всех полей ψ^μ в (4) должны, естественно, совпадать ($\mu = 1 \ldots 5$, так как комплексная размерность пространства-времени равна $10/2 = 5$). Коррелятор полей с различными значениями μ распадается в произведение корреляторов. То же относится и к корреляторам полей ∂x^μ. В соответствии с этим коррелятор (3) нужно представить в виде суммы по лоренцевым индексам. В каждом слагаемом $2p-2$ операторов $\psi(Q_\alpha)$ разбиваются на пять групп в зависимости от значений μ:

$$\Lambda^5_{1/2}[e]\langle \psi\partial x(Q_1) \ldots \psi\partial x(Q_{2p-2}) \rangle \to \sum_{\text{разб.}} c_{\text{разб.}} \prod_{\mu=1}^{5} \Lambda_{1/2}[e]\langle \psi^\mu(Q_{\mu 1}) \ldots \psi^\mu(Q_{\mu n_\mu}) \rangle_e$$
$$\langle \partial x^\mu(Q_{\mu 1}) \ldots \partial x^\mu(Q_{\mu n_\mu}) \rangle. \tag{5}$$

Здесь все числа n_μ четные, $\sum_{\mu=1}^{5} n_\mu = 2p-2$; $c_{\text{разб}}$ — комбинаторные множители, зависящие от размерности пространства-времени $d/2=5$. Каждый фермионный коррелятор в (5) содержит еще $2^{n_\mu -1}$ слагаемых, отличающихся разделением операторов ψ на $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\tilde{\psi}}$. Окончательное выражение для Φ сводится к следующей сумме по разбиениям точек Q_α на пары $(\tilde{Q}_i, \tilde{\tilde{Q}}_i)$, $i = 1 \ldots p-1$:

$$\Phi = \Lambda_2 \Lambda_0^{-5} \sum_{\text{разб}} F[\tilde{Q}_i, \tilde{\tilde{Q}}_i] \sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^{6-p}(0) \frac{\prod_{i=1}^{p-1} \theta_e(\tilde{\mathbf{Q}}_i - \tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}_i)}{\theta_e(\Sigma \mathbf{Q}_\alpha - 2\Sigma \mathbf{R}_i)} . \tag{6}$$

Функции $F[\tilde{Q}_i, \tilde{\tilde{Q}}_i]$ *не* зависят от θ-характеристик; наряду с комбинаторными множителями в них входят комбинации бидифференциалов Прима, а также не аналитические по модулям вклады, содержащие мнимую часть матрицы периодов, которые возникают из корреляторов полей ∂x.

3. В случае рода 2 имеется только одна точка R и только одна пара $(Q, \tilde{Q}) = (Q_1, Q_2)$. Сумма по характеристикам в (6) сводится к

$$A_{1\ 2} = \sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^4 \frac{\theta_e(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)}{\theta_e(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 - 2\mathbf{R})} . \tag{7}$$

В нее дают вклад только четные несингулярные характеристики e (это остается справедливым для всех $p<6$.) Если выбрать $Q_2 = R$ то сумма (7) превратится в тождество Римана в форме [2] $\sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^4 \equiv 0$.

Такой простой прием в случае родов $p>2$ не срабатывает. Например, для $p=3$ имеются три различных разбиения четырех точек Q_α на пары и три различных суммы по характеристикам:

$$A_{12|34} = \sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^3 \theta_e(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)\theta_e(\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_4) / \theta_e(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4 - 2\mathbf{R}_1 - 2\mathbf{R}_2);$$

$$A_{13|24} = \sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^3 \theta_e(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_3)\theta_e(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_4) / \theta_e(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4 - 2\mathbf{R}_1 - 2\mathbf{R}_2); \tag{8}$$

$$A_{14|23} = \sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^3 \theta_e(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_4)\theta_e(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_3) / \theta_e(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4 - 2\mathbf{R}_1 - 2\mathbf{R}_2).$$

Если положить $Q_3 = R_1$, а $Q_4 = R_2$, то зависимость от Q_1 и Q_2 сразу исчезает только из одной линейной комбинации этих выражений:

$$A_{13|24} / E_{13}E_{24} - A_{14|23} / E_{14}E_{23} = (E_{12}E_{34} / E_{13}E_{14}E_{23}E_{24}) \sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^4 \equiv 0 .$$

Сами по себе все суммы A превращаются в тождества Римана, если совместить с R_1 и R_2 не две, а все четыре точки Q_α, например, $Q_1 = Q_3 = R_1$; $Q_2 = Q_4 = R_2$ (при этом $A_{12|34} = \sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^2 \theta_e^2(\mathbf{R}_{12}) \equiv 0$ см (10)). Такое совмещение, однако, требует осторожности, поскольку функции $F[\tilde{Q}_i, \tilde{\tilde{Q}}_i]$ в (6) имеют полюса при совпадении каких-либо двух точек Q_α. Как видно из (3), полюса эти не выше чем третьего порядка по каждой из переменных $\vec{\xi}_1 = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{R}_1$; $\vec{\xi}_2 = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{R}_2$. Поэтому зануление статистической суммы будет обеспечено, если каждая сумма A будет иметь нуль более высокого порядка по ξ_1 и ξ_2. Если считать, что ξ_1 и ξ_2 одного порядка малости, ξ_1, $\xi_2 \sim \xi$, то это действительно так (для $p=3$). Чтобы убедиться в этом, надо воспользоваться тождеством Римана $\sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^3 \theta_e(\mathbf{z}) = 2^p \theta_*^4(\mathbf{z}/2)$ (оно доказывается, например, способом, изложенным в [2]), из которого следует, что

$$\sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^3 \theta_e\left(\int_R^{R+\xi} \vec{\omega}\right) \sim \theta_*^4 \left(\frac{1}{2} \int_R^{R+\xi} \vec{\omega}\right) \sim \xi^{12}. \tag{9}$$

В последнем переходе надо учесть, что $\theta_{*,i}\, \omega_i'(R) = \theta_{*,i}\, \omega_i'(R) = 0$, поэтому $\theta_* \left(\frac{1}{2} \int_R^{R+\xi} \vec{\omega}\right) \sim \xi^3$. (Отметим, что в силу теоремы Римана $\theta_*\left(\int_R^{R+\xi} \vec{\omega}\right) \equiv 0$, но нам требуется θ-функция от половинного аргумента, поэтому вместо тождественного нуля имеется только малость по ξ. К сожалению порядок этой малости не зависит от p, поэтому одно это рассуждение в случае $p > 3$ недостаточно). Еще одно тождество, нужное в случае

$$A_{12|34}: \ \sum_e \langle e_*, e\rangle \theta_e^2 \theta_e(\mathbf{R}_{12})\vec{\theta_e}(\mathbf{R}_{12}+\vec{\xi}) = 2^p \theta_*^2(\vec{\xi}/2)\theta_*^2(\mathbf{R}_{12}+\vec{\xi}/2) \sim \xi^{10}. \tag{10}$$

К сожалению, даже для $p=3$ ситуация при произвольном соотношении между ξ_1 и ξ_2 более сложная. С ростом рода трудности усугубляются.

4. Коррелятор духовых спин-токов в (1) является аналитической функцией на пространстве модулей, но значительно более сложной, чем фермионные корреляторы. Он выражается через θ-функции от различных комбинаций Q_α и их логарифмические производные. Конкретное выражение в случае рода 2 содержится, например, в [1] [1)]. Даже для $p=2$ духовый коррелятор, видимо, не зануляется, если просто положить $Q_2 = R$, а Q_1 оставить произвольным. Соответствующий вклад обращается в нуль только если устремить $Q_1 \to R$. При этом вычеты во всех полюсах ξ^{-3}, ξ^{-2}, ξ^{-1}, ξ^0 зануляются в силу соотношения (9) (теперь речь идет о $p=2$!). Из соотношений типа (10) следует, что нулевой ответ получится также, если устремить Q_1 не к R, а к любой другой из шести точек ветвления на гиперэллиптической поверхности рода 2. (Это было проверено в [10] явным и весьма трудоемким вычислением в гиперэллиптических координатах. По поводу вычислений в этих координатах см. также [11]).

5. Не вполне ясно, в какой мере можно обобщить приведенные выше рассуждения на случай высших родов. Особого внимания заслуживают суммы типа A (как видно из (4), в сумму (6) они входят в таких комбинациях, что сингулярность при $\theta_e(0)=0$ (для $p>6$) отсутствует). Мы постарались выделить причины резкого упрощения формул для статистической суммы в случае $p=2$. Нам представляется, что для зануления статсумм *до* интегрирования по пространству модулей во всяком случае необходимо выбирать χ_α локализованными в точках R_i (в гиперэллиптическом случае, видимо, можно пользоваться и другими точками ветвления [10, 11]).

Подчеркнем, что представление (1) статистической суммы в терминах пространства четных (а не супер-) модулей явно нарушает модулярную инвариантность введением неинвариантных нулевых мод χ_α. Наши итоговые формулы зависят от выбора нечетной θ-характеристики e_*, *и* инвариантны относительно модулярных преобразований, не изменяющих e_*. Это достигнуто использованием в трех *различных* местах – при определении знаков ϵ_e, детерминантов $\det\bar{\partial}$ и $(-1/2,1)$-дифференциалов χ_α – одной и той же нечетной характеристики. В результате происходит значительное упрощение формул, а вместо производной по координатам пространства модулей получается тождественный нуль. (Видимо, это может быть интерпретировано как устранение каких-то аномалий).

Стоит обратить внимание на то, что коррелятор полей ∂x в (3) не является голоморфным на пространстве модулей – содержит мнимую часть матрицы периодов. Истинный смысл этого обстоятельства прояснится, по-видимому, когда удастся лучше понять смысл производных по координатам пространства модулей, и то, каким образом отличаются друг от друга различные представления для статистических сумм и амплитуд. По причине неголоморфности требует определенного пересмотра предложение [3] использовать данные о модулярных формах для обоснования зануления статсумм. (Одна из попыток реализовать это предложение предпринята в [12]).

Следует отметить, эта работа возникла из попыток понять смысл обнаруженных недавно [10, 13] тождеств, обеспечивающих зануление определенных вкладов в гиперэллиптические статсуммы в теории суперструн. Они были первоначально записаны в терминах точек ветвления, а не θ-функций.

Мы признательны Л.Алварецу-Гоме, Э.Гаве, В.Книжнику, М.Ольшанецкому, М.Пескину, А.Рослому и В.Шокурову за обсуждения, а также М.Бонини, Р.Йенго, Д.Монтано и М.Пескину, приславшим нам свои работы о суперструнных статистических суммах.

---

1) Оно пропорционально $\dfrac{\theta_e^5 \theta_e(2Q_2 - 2R)}{\theta_e^2(Q_1 + Q_2 - 2R)}[\partial_i \ln \theta_e^2(2Q_2 - 2R)\,\omega_i(Q_1) + e - \text{независимые члены}]$.

Литература

1. *Verlinde E., Verlinde H.* Preprint LPTENS-39, 1986.
2. *Морозов А., Переломов А.* Письма в ЖЭТФ, 1986, 44, 157; Phys. Lett., 1987, **183B**, 296.
3. *Белавин А., Книжник В.* ЖЭТФ, 1986, 91, 364.
4. *Knizhnik V.* Phys. Lett., 1986, **178B**, 21.
5. *Bonini M., Iengo R.* Preprint TRIEST-11 EP, 1987.
6. *Knizhnik V.* Phys. Lett., 1986, **178B**, 21.
7. *Martinec E.* Nucl. Phys., 1987, **B281**,157.
8. *Alvarez-Gaume L., Bost J.-B., Moore G., Nelson P., Vafa C.* Phys. Lett., 1986, **178B**, 41.
9. *Fay J.D.* Theta Functions on Riemann Surfaces; Springer, 1973; *Mumford D.* Tata Lectures on Theta; Birkhauser, 1983.
10. *Книжник В.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **46**, 8.
11. *Montano D.* Preprint SLAC-4319, 1987.
12. *Moore G., Harris J., Nelson P., Singer I.* Phys. Lett., 1986, **178B**, 167.
13. *Morozov A.* Preprint ITEP-69, 1987.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
25 июня 1987 г.