Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 7. стр. 270 – 272 *10 октября 1987 г.*

ФУНКЦИЯ-ПАРАМЕТР ПОРЯДКА В СПИНОВОМ СТЕКЛЕ НА РЕШЕТКЕ БЕТЕ

Я.В.Федоров

Показано, что рассмотрение класса иерархических граничных условий для спинового стекла на решетке Бете с бесконечной ветвистостью приводит к возникновению ниже температуры перехода непрерывной функции -параметра порядка $S(x)$, монотонной на $x \in [0,1]$.

Как известно , в модели спинового стекла с бесконечным радиусом взаимодействия между спинами, предложенной Шеррингтоном и Киркпатриком (ШК) [1], ниже температуры де Альмейда – Таулесса (АТ) [2] происходит переход в неэргодическую фазу. Согласно Паризи [3 – 4], этот переход с математической точки зрения состоит в замене параметра Эдвардса – Андерсона q [5] на непрерывную функцию $q(x)$, монотонную на $x \in [0,1]$. Эта функция описывает перекрытие в фазовом пространстве долин, расстояние между которыми равно x [6].

В связи с тем, что свойства реальных спиновых стекол отличаются от свойств модели ШК, в последнее время изучаются другие модели. С этой точки зрения интересным является изинговское спиновое стекло на решетке Бете [7 – 8]. Как показано в [8], переход в фазу спинового стекла в этой модели характеризуется возникновением зависимости эффективных полей h_i в узле i решетки Бете от граничных условий. Опираясь на идеи [8], в работе [9] в пределе бесконечной ветвистости $r \to \infty$ было получено выражение для перекрытия $S = \overline{m_{i1} m_{i2}}$, где $m_i = \mathrm{th} h_i$ черта означает усреднение по распределению обменных интегралов J_{ij}, а индексы 1 и 2 относятся к двум разным граничным условиям (двум репликам [8]). Ниже температуры, выражение для которой совпадает с температурой АТ в модели ШК, устойчивым оказывается решение $S = \widetilde{S} < q = \overline{m_i^2}$. Таким образом в отличие от модели ШК, на решетке Бете при $r \to \infty$ ниже T_g кроме q был найден еще только один параметр $\widetilde{S}$. Возможность существования других параметров в [9] не обсуждалась.

В настоящей работе показано, что это является следствием неявного ограничения класса граничных условий и что оказывается возможным введение функции-параметра порядка $S(x)$, $x \in [0,1]$.

Следуя [9], рекуррентные соотношения между перекрытием S_i в i-м узле и перекрытиями в узлах j, ближайших внешних по отношению к i для случая $r \gg 1$; $\overline{J_{ij}} = 0$; $\overline{J_{ij}^2} = J^2/r$ имеют вид:

$$S_i = \iint dz_1 dz_2 \,\mathrm{th}(\beta H + z_1)\,\mathrm{th}(\beta H + z_2) P_i(z_1, z_2, S_{AV}) \equiv \phi(A_{AV}) \qquad (1)$$

где

$$P_i(z_1, z_2, S_{AV}) = \frac{1}{2\pi\beta^2 J^2 (q^2 - S_{AV}^2)^{1/2}} \exp\left[- \frac{q(z_1^2 + z_2^2) - 2z_1 z_2 S_{AV}}{2\beta^2 J^2 (q^2 - S_{AV}^2)} \right], \qquad (2)$$

а

$$\beta = \frac{1}{T}; \qquad q = \langle \mathrm{th}^2 U \rangle \equiv \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z^2/2)} \mathrm{th}(\beta H + \beta J z \sqrt{q}) \qquad S_{AV} = \frac{1}{r} \sum_{J=1}^{r} S_j \qquad (3)$$

и суммирование в (3) осуществляется по всем r внешним соседям узла i [1)]. Для определения перекрытий S_i внутри дерева кроме соотношений (1) – (3) необходимо задать граничные условия – перекрытия на удаленной границе.

Будем рассматривать решетку Бете как предел дерева Кейли из z поколений при $z \to \infty$. Занумеруем поколения начиная от границы так, что граничное поколение имеет номер 0, а центральный узел – номер z. Кластер из r^k граничных узлов, таких что общий предок для любых двух из них принадлежит поколению с номером не превосходящим k обозначим U_p^k, $p = 1, 2, \ldots, r^{z-k}$. Ниже мы предлагаем иерархический метод построения набора граничных перекрытий, состоящий в последовательном заполнении кластеров все большего размера: $U_1^1 \subset U_1^2 \subset \ldots \subset U_1^z$:

1-й шаг: Кластер U_1^1 заполняем набором из r перекрытий S_i^0, ровно l из которых в точности равны q, а остальные произвольные, меньшие q. Заполненный таким образом кластер обозначим $U_1^1(l)$ (например, если все $S_i^0 = q$, то кластер обозначается $U_1^1(r)$).

. . . . . .

k-й шаг: Кластер $U_1^k(l)$ получим объединением ровно l кластеров $U_1^{k-1}(r)$ и $r - l$ кластеров $U_1^{k-1}(l)$:

$$U_1^k(l) = U_1^{k-1}(r) \cup \ldots \cup U_1^{k-1}(r) \cup U_1^{k-1}(l) \cup \ldots \cup U_1^{k-1}(l).$$

Действуя таким образом, мы за z шагов получим полный набор граничных перекрытий, т. к. заполним кластер U_1^z. Видно, что в этом наборе ровно в $l^z\,[1 - (1 - l/r)^z]$ узлах произошло самоперекрытие двух реплик, т. е. соответствующие этим узлам перекрытия равны q. Поэтому кажется естественным отношение $x = l/r$ выбрать за расстояние между репликами, причем $x = 1$ отвечает полному совпадению реплик, а $x = 0$ – минимальному перекрытию между ними. Именно эти два значения x и отвечают двум параметрам порядка q и $\tilde{S}$, найденным в [9].

---

1) Нам будет удобно считать, что все узлы, кроме центрального имеют $r + 1$-го соседа, а центральный имеет ровно r соседей.

Описанные выше иерархические граничные условия вместе с выражениями (1 – 3) приводят к следующему уравнению для перекрытия далеко от границы

$$S(x) = \phi\{qx + (1-x)S(x)\} \equiv \phi[S_{AV}(x)]. \qquad (4)$$

При $r \to \infty$ $x = l/r$ можно рассматривать как аргумент непрерывной на $x \in [0,1]$ функции $S(x)$. Устойчивость неподвижных точек итерационной процедуры, приводящей к (4) определяется условием $\lambda(x) \leqslant 1$ где

$$\lambda(x) = (1-x)\iint dz_1 dz_2 P(z_1, z_2, S_{AV}(x))\,\mathrm{ch}^{-2}(\beta H + z_1)\mathrm{ch}^{-2}(\beta H + z_2). \qquad (5)$$

Из (4) видно, что существует "реплично-симметричное" решение $S(x) \equiv q$. Из (5) находим, что оно устойчиво при $x > x_1$, где

$$x_1 = 1 - (\beta^2 J^2 < \mathrm{ch}^{-4} U >)^{-1}. \qquad (6)$$

Условие $x_1 = 0$ определяет температуру перехода, которая оказывается совпадающей с температурой АТ в модели ШК [9]. Нетрудно получить выражение для $S(x)$ при $1 - x/x_1 \ll 1$

$$S(x) = q - \frac{x_1 - x}{1 - x_1}\,\frac{\langle \mathrm{ch}^{-4} U\rangle^2}{2[\langle \mathrm{ch}^{-4} U\rangle - \langle \mathrm{ch}^{-6} U\rangle]}. \qquad (7)$$

Соответствующее собственное значение $\lambda(x) = 1 - [(x_1 - x)/(1 - x_1)] < 1$, т. е. это решение устойчиво. Отметим, что при $x < x_1$ функция $S(x)$ строго возрастает: $dS/dx = \lambda(x)\,(1-\lambda(x))^{-1} \times (q - S(x))/(1-x)^{-1} > 0$. Выпишем также значения характерных величин при $H = 0$; $\tau = 1 - T/J \ll 1$

$$x_1 = \frac{4}{3}\tau^2;\ S(0) = 0;\ S(1) = \tau;\ \left.\frac{dS}{dx}\right|_{x=0} = \frac{3}{2\tau} + O(1);\ \left.\frac{dS}{dx}\right|_{x=x_1} = \frac{1}{2\tau} + O(1). \qquad (8)$$

Автор благодарен Е.Ф.Шендеру за многократные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. *Sherrington D., Kirkpartick S.* Phys. Rev. Lett., 1975, **35**, 1972.
2. *de Almeida J.R.L., Thouless D.J.* J. Phys. A, 1978, **11**, 983.
3. *Parisi G.* Phys. Rev. Lett., 1979, **43**, 1754.
4. *Parisi G.* J. Phys. A, 1980, **13**, L115.
5. *Edwards S.J., Anderson P.W.* J. Phys. J., 1975, **5**, 965.
6. *Parisi G.* Phys. Rev. Lett., 1983, **50**, 1946.
7. *Bowman D., Levin K.*, Phys. Rev. B, 1982, **25**, 3438.
8. *Thouless D.J.*, Phys. Rev. Lett., 1986, **56**, 1082.
9. *de Oliveira M.J., Salinas S.R.*, Phys. Rev. B, 1987, **35**, 2005.

Институт ядерной физики им. Б.П.Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 июля 1987 г.