Письма в ЖЭТФ, том 86, вып. 2, с. 153 – 157 © 2007 г. 25 июля

# От свободных полей к $AdS$: случай частиц со спином

*М. Конюшихин*[1)]

*Институт теоретической и экспериментальной физики, 117259 Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 25 мая 2007 г.

Однопетлевые диаграммы с тремя внешними линиями в обычной комформной теории поля в $D$ измерениях равны конечной сумме древесных диаграмм с одной вершиной в теории с метрикой $AdS_{D+1}$. Вычисляются некоторые члены дуального лагранжиана, отвечающие за взаимодействие. Рассмотрены частицы без спина, частицы со спином 1/2 и частицы со спином 1.

PACS: 11.10.Kk, 11.15.Pg, 11.25.Tq

**1.** Широко известно, что калибровочные теории с калибровочной группой $SU(N)$ при больших $N$ могут иметь дуальное описание в терминах замкнутой теории струн с натяжением струны $\sim g_{YM}\sqrt{N}$. В частности, теория $\mathcal{N}=4$ SYM дуальна теории струны типа $IIB$ в метрике $AdS_5 \times S_5$. Такое соответствие следует из дуальности между открытыми и замкнутыми струнами [1 – 3].

Дуальность калибровочных теорий и струн можно изучать с разных сторон. В работах [4, 5] было показано, что однопетлевая диаграмма с тремя внешними линиями в теории безмассового скалярного поля с взаимодействием типа $\Phi^3$ в $D$ измерениях равна древесной диаграмме с одной вершиной, но в другой скалярной теории поля с взаимодействием $\Phi^3$ – теории в $D+1$ измерении в метрике $AdS_{D+1}$. Такое равенство получается, если петлю переписать через швингеровские параметры, а затем сделать замену координат. Аналогичное соответствие известно и для случая одной петли с двумя внешними линиями. Кроме того, диаграммы, подобные той, что изображена на рис.1a, также равны древесным в дуальной теории.

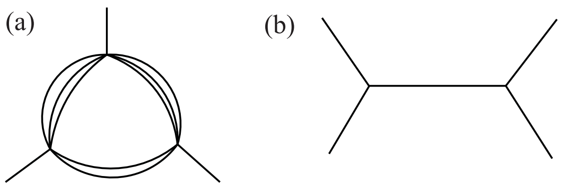


Рис.1

Неизвестно аналогичного утверждения про диаграммы с большим числом внешних линий. Например, уже в случае однопетлевой диаграммы с четырьмя внешними линиями в дуальном описании будет сумма древесных диаграмм с двумя вершинами (рис.1b). Сумма ведется по типам промежуточных частиц (по их спинам и массам), бегающих между вершинами. Различных типов частиц, дающих вклад в ответ, может быть бесконечно много, сумма будет бесконечной, и поэтому трудно написать явное математическое выражение со стороны $AdS$.

В данной работе показано, что любая однопетлевая диаграмма с тремя внешними линиями (в теории с полиномиальным по полям взаимодействием) всегда равна древесной диаграмме или конечной сумме древесных диаграмм в дуальной теории. Найден явный вид такой суммы для двух однопетлевых диаграмм с тремя внешними линиями; скалярные или векторные частицы стоят на внешних линиях, скалярная частица или частица со спином 1/2 бегает в петле (рис.2). В качестве ответа выписаны соответствующие члены дуального лагранжиана, отвечающие за взаимодействие. В ответе содержатся скалярные и векторные поля, взаимодействующие как $\Phi^* A^\mu i\partial_\mu \Phi$.

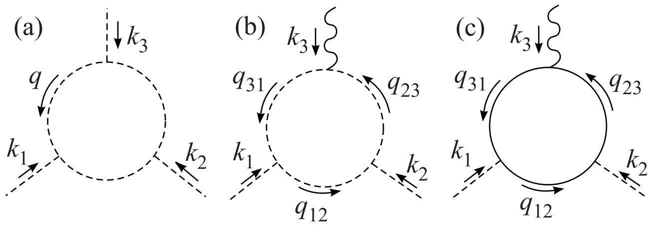


Рис.2. Однопетлевые диаграммы

**2.** В данном разделе повторяется результат из [4] и вводятся обозначения, удобные для дальнейшего. Диаграмма на рис.2a равна древесной в $AdS_{D+1}$.

Рассмотрим скалярную безмассовую теорию поля в $D$ измерениях с взаимодействием $L_{\text{int}} = \lambda\Phi^3$. Пе-

[1)]e-mail: konush@itep.ru

репишем диаграмму на рис.2а через швингеровские параметры по формуле

$$\frac{1}{p^2} = \int_0^\infty dT e^{-Tp^2}. \tag{1}$$

Соответствующее выражение будет иметь вид

$$I \sim \int dq \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+k_1)^2} \frac{1}{(q-k_3)^2} =$$
$$= \int dT_1 dT_2 dT_3 dq e^{-T_2 q^2 - T_3 (q+k_1)^2 - T_1 (q-k_3)^2}. \tag{2}$$

Используя $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ и вводя обозначение $Q = q + \alpha_3 k_1 - \alpha_1 k_3$, перепишем показатель экспоненты в форме $-S - \sum_i T_i Q^2$, где

$$\alpha_i = T_i / \sum T, \tag{3}$$

$$S = k_1^2 \frac{T_2 T_3}{\sum T_i} + k_2^2 \frac{T_3 T_1}{\sum T_i} + k_3^2 \frac{T_1 T_2}{\sum T_i}. \tag{4}$$

Параметры $\alpha_i$ удовлетворяют условию $\sum \alpha_i = 1$. Стоит заметить, что дуальное описание для диаграммы на рис.2а возможно в силу особой формы функции $S$: в ней импульсы на внешних линиях не смешиваются друг с другом. В случае однопетлевой диаграммы с четырьмя внешними линиями это не так.

Проинтегрируем по $Q$ и сделаем замену переменных:

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{T_1 T_2 T_3}{T_i \sum T_j}. \tag{5}$$

Область интегрирования для $\rho$ такая же, что и для $T$: $\rho_i \in (0, \infty)$. Имеем:

$$I \sim \int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \frac{(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{D/2-3}}{(\sum \rho_i)^{D-3}} e^{-\sum k_i^2/\rho_i}. \tag{6}$$

Далее удобно перейти в координатное представление, вводя дополнительные интегрирования:

$$\int dk_1 dk_2 dk_3 dx e^{ik_1(x_1-x)} e^{ik_2(x_2-x)} e^{ik_3(x_3-x)} I. \tag{7}$$

После взятия интегралов по $k$ получим:

$$\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 dx \left( \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{\sum \rho_i} \right)^{D-3} \exp\left\{ -\sum_i \frac{\rho_i (x_i - x)^2}{4} \right\}. \tag{8}$$

Осталось поднять $\sum \rho_i$ в экспоненту по формуле

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dt\, t^{n-1} e^{-tA} \tag{9}$$

и переписать ответ в виде

$$\int \frac{dtdx}{t^{D/2+1}} K_{D-2}^{(1)} K_{D-2}^{(2)} K_{D-2}^{(3)}. \tag{10}$$

Здесь $K_\delta^{(i)} = K_\delta(t, x_i - x)$, и функция

$$K_\delta(t,x) = \frac{t^{\delta/2}}{(t + x^2/4)^\delta} \sim t^{\delta/2} \int_0^\infty d\rho \rho^{\delta-1} e^{-\rho(t+x^2/4)} \tag{11}$$

является пропагатором частицы из объемлющего пространства на границу в метрике $AdS_{D+1}$. В координатах $z = \sqrt{t}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}/2$ при $z > 0$ эта функция удовлетворяет уравнению

$$\left[ z^{D+1} \partial_z z^{1-D} \partial_z + z^2 \partial_\mu^2 + \delta(D-\delta) \right] K_\delta(z,y) = 0, \tag{12}$$

$$[\Delta + m^2] K_\delta(z,y) = 0, \tag{13}$$

где $m^2 = \delta(D-\delta)$ – масса частицы, а $\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \sqrt{g} g^{ab} \partial_b$ – оператор Лапласа в метрике $AdS$:

$$ds^2 = \frac{dz^2 - dy^2}{z^2}. \tag{14}$$

Таким образом, однопетлевая диаграмма на рис.2а равна древесной диаграмме в $AdS$. В выражении (10) $1/t^{D/2+1} = \sqrt{g}$, а потому древесной диаграмме соответствует вершина, построенная по взаимодействию $\sim \int \Phi^3 \sqrt{g} dtdx$ для скалярного поля в $AdS$.

Итак, в дуальном описании частицы распространяются с границы пространства $AdS_{D+1}$ в объемлющее пространство.

**3.** В случае частиц со спином вычисление становится заметно сложнее. Необходимо разбираться, чему равны пропагаторы векторных частиц в $AdS$. Несложно заметить, что дуальное описание всегда будет давать сумму конечного числа древесных диаграмм.

Посмотрим, какие типы вершин будут получаться в общем случае. Сформулируем форму ответа в общем случае однопетлевой диаграммы с тремя внешними линиями. Вид выражения (4) зависит только от $1/p^2$ частей пропагаторов и не зависит от вершин и точной формы пропагаторов. В общем случае выражение, соответствующее какой-нибудь диаграмме, можно записать в виде

$$\int dq F^{\mu_1 \cdots \mu_n}(q, k_1, k_2, k_3) \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+k_1)^2} \frac{1}{(q-k_3)^2}, \tag{15}$$

где $F^{\mu_1 \cdots \mu_n}(q, k_1, k_2, k_3)$ – полином по $q$ и $k$. Эта функция различна для разных диаграмм. После введения швингеровских параметров и интегрирования по $q$ получается полином от $k$ и от $\alpha_i = T_i/\sum T$. Теперь, если в формулу (7) подставить такой полином от $k$, то можно заменить $k_i$ на $-i(\partial/\partial x_i)$. Поэтому в общем случае ответ выглядит так:

$$\sum_{\{\delta\},\{i\}} C^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{\delta_1\delta_2\delta_3}(t)\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{\mu_n}_{i_n}}K^{(1)}_{\delta_1}K^{(2)}_{\delta_2}K^{(3)}_{\delta_3}. \tag{16}$$

Важно, что эта сумма конечна. Ясно, что дуальное выражение – это сумма древесных диаграмм с одной вершиной, выражение для которой определяется по взаимодействию в $AdS$:

$$S_{\rm int} = \int \sqrt{g}dtdx \times$$
$$\times \sum \Omega^{\{\mu,\nu,\rho,\lambda,\sigma,\delta\}}(t)\{\partial_\mu\}\Phi^{\{\nu\}}\{\partial_\rho\}\Phi^{\{\lambda\}}\{\partial_\sigma\}\Phi^{\{\delta\}}. \tag{17}$$

Здесь $\{\partial_\mu\} = \partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_k}$ и $\Phi^{\{\nu\}} = \Phi^{\nu_1\ldots\nu_l}(t,x)$ – тензорное поле. Индексы $\mu_i$ в (16) $D$-мерны, тогда как индексы в (17) $D+1$-мерны. Взаимодействие (17) воспроизводит (16) только тогда, когда правильно выбраны пропагаторы для тензорных полей.

**4.** Проиллюстрируем описанные выше утверждения на конкретных примерах. Рассмотрим диаграмму, изображенную на рис.2b. Это простейший пример диаграммы с векторной частицей на внешней линии. Будет показано, что дуальное описание содержит конечную сумму древесных диаграмм.

Функция $F^\mu$, введенная в (15), для данного случая имеет простой вид

$$F^\mu = q^\mu_{31} + q^\mu_{23}. \tag{18}$$

Заметим, что $q^\mu_{ij} = Q^\mu + \alpha_j k^\mu_i - \alpha_i k^\mu_j$ и что $\alpha_i = \rho_i/\sum\rho$. Тогда

$$F^\mu = 2Q^\mu + k^\mu_1(\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3) - k^\mu_2(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3). \tag{19}$$

Рассмотрим вычисление выражения

$$\int dxd^3\rho\, dk_1dk_2dk_3dQ\frac{(\rho_1\rho_2\rho_3)^{D/2-3}}{(\sum\rho)^{D-3}}\times$$
$$\times e^{-Q^2-\sum k_i^2/\rho_i}e^{i\sum k_i(x_i-x)}F^\mu \tag{20}$$

более подробно. В последующих формулах подразумевается, что $k_i = -i(\partial/\partial x_i)$. Проинтегрируем по $Q$ и по $k$:

$$\int dxd\rho_1d\rho_2d\rho_3\left(\frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{\sum\rho}\right)^{D-3}[k^\mu_1(\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3) -$$
$$- k^\mu_2(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)]e^{-\sum\rho_i(x_i-x)^2/4} \tag{21}$$

и используем соотношение

$$\int d\rho_1d\rho_2d\rho_3\frac{\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\rho_3^{n_3}}{(\sum\rho_i)^\Delta}e^{-\sum\frac{\rho_i x_i^2}{4}} =$$
$$=\frac{\Gamma(n_1+1)\Gamma(n_2+1)\Gamma(n_3+1)}{\Gamma(\Delta)}\int dtt^{\Delta-\frac{n_1+n_2+n_3+5}{2}}\times$$
$$\times K_{n_1+1}(t,x_1)K_{n_2+1}(t,x_2)K_{n_3+1}(t,x_3). \tag{22}$$

Тогда ответ для (21) с точностью до множителя равен

$$\int\frac{dxdt}{t^{D/2+1}}\sqrt{t}\Big\{\frac{\partial}{\partial x^\mu_1}[K^{(1)}_{D-2}K^{(2)}_{D-1}K^{(3)}_{D-2} -$$
$$K^{(1)}_{D-1}K^{(2)}_{D-2}K^{(3)}_{D-2} - K^{(1)}_{D-2}K^{(2)}_{D-2}K^{(3)}_{D-1}] -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu_2}[K^{(1)}_{D-1}K^{(2)}_{D-2}K^{(3)}_{D-2} -$$
$$- K^{(1)}_{D-2}K^{(2)}_{D-1}K^{(3)}_{D-2} - K^{(1)}_{D-2}K^{(2)}_{D-2}K^{(3)}_{D-1}]\Big\}. \tag{23}$$

Выпишем соответствующие члены взаимодействия для дуального лагранжиана:

$$L_{\rm int} \sim \Phi_1^* i\partial_M\Phi_2A_2^M - \Phi_2^* i\partial_M\Phi_1A_2^M -$$
$$- \Phi_2^* i\partial_M\Phi_2A_1^M + {\rm h.c.} \tag{24}$$

Здесь $M$ – это $D+1$-мерный индекс, $\Phi_1$ – скалярное поле с $\delta = D-1$, $\Phi_2$ – скалярное поле с $\delta = D-2$, $A_1^M$ – векторное поле с $\delta = D-1$, $A_2^M$ – векторное поле с $\delta = D-2$. Масса соответствующей частицы определяется как $m^2 = \delta(D-\delta)$. Вторые квадратные скобки в (23) дают комплексно сопряженные члены в (24).

Такое взаимодействие правильно воспроизводит (23), если на пропагаторы $G_{MN}$ для векторных частиц наложены ограничения

$$G^{D+1,\mu} = 0, \tag{25}$$

$$G^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\sqrt{t}K_\delta(t,x), \tag{26}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – плоская метрика.

Заметим, что (24) правильно воспроизводит лагранжиан взаимодействия скалярного поля с калибровочным. Член вида $A_\mu^2\Phi^2$ не ухватывается нами в данном порядке теории возмущений.

**5.** Рассмотрим более сложный случай: диаграмму, изображенную на рис.2c. В петле бегает частица со спином 1/2. Соответствующая функция

$$F^\mu = \frac{1}{2}{\rm tr}\{\gamma^\mu\hat{q}_{31}\hat{q}_{12}\hat{q}_{23}\}. \tag{27}$$

Чтобы переписать соответствующее выражение в терминах $AdS$, заменим $q \to Q$, сохраним под интегралом только четные степени $Q$, а слагаемое, содержащее $Q_\mu Q_\nu$ заменим на

$$\frac{1}{2\sum T_i}\eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum \rho_i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\eta_{\mu\nu}. \qquad (28)$$

После интегрирования по $Q$ функция $F^\mu$ будет иметь вид

$$\sum k_i^\mu[\text{нечто от } k^2 \text{ и } \alpha]. \qquad (29)$$

Мы вычисляем выражение

$$\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \frac{(\rho_1\rho_2\rho_3)^{D/2-3}}{(\sum\rho_i)^{D-3}} e^{-\sum k_i^2/\rho_i} \times \\ \times \sum k_j^\mu[\text{нечто от } k^2 \text{ и } \alpha]. \qquad (30)$$

Под интегралом можно избавиться от четных степеней $k$ при помощи интегрирования по частям:

$$\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \frac{\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\rho_3^{n_3}}{(\sum\rho_i)^M} k_1^2 e^{-\sum k_i^2/\rho_i} = \\ = -\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 e^{-\sum k_i^2/\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left[\frac{\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\rho_3^{n_3}}{(\sum\rho_i)^M}\rho_1^2\right]. \qquad (31)$$

Это дает:

$$k_1^2 \to \sum \rho_i\left[M\alpha_1^2 - (n_1+2)\alpha_1\right] \qquad (32)$$

и то же самое для $k_2^2$ и для $k_3^2$. Последнее равенство демонстрирует очевидное свойство:

$$\frac{x^2}{(t+x^2)^\Delta} = \frac{1}{(t+x^2)^{\Delta-1}} - \frac{t}{(t+x^2)^\Delta}. \qquad (33)$$

Фермионная петля дает дополнительную (по отношению с диаграмме на рис.2b) расходимость, и переброс производной в интеграле законен только при условии $M > n_1 + 2$ (что дает $D < 4$).

Теперь подставим вместо $k^2$ выражения по формуле (32). Удивительно, что после довольно громоздких вычислений получается простой ответ для $F^\mu$:

$$F^\mu \to (D-2)\sum\rho_i\alpha_1\alpha_2\big\{k_1^\mu(\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3) - \\ - k_2^\mu(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\big\}. \qquad (34)$$

Осталось перейти в координатное представление:

$$\int\frac{dxdt}{t^{D/2+1}}\sqrt{t}\bigg\{\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\bigg[K_{D-1}^{(1)}K_D^{(2)}K_{D-2}^{(3)} - \\ - K_D^{(1)}K_{D-1}^{(2)}K_{D-2}^{(3)} - \frac{D-1}{D}K_{D-1}^{(1)}K_{D-1}^{(2)}K_{D-1}^{(3)}\bigg] - \\ - \frac{\partial}{\partial x_2^\mu}\bigg[K_D^{(1)}K_{D-1}^{(2)}K_{D-2}^{(3)} - \\ - K_{D-1}^{(1)}K_D^{(2)}K_{D-2}^{(3)} - \frac{D-1}{D}K_{D-1}^{(1)}K_{D-1}^{(2)}K_{D-1}^{(3)}\bigg]\bigg\}. \qquad (35)$$

Соответствующий лагранжиан взаимодействия:

$$L_{\text{int}} = \Phi_1^* i\partial_M\Phi_0 A_2^M - \Phi_0^* i\partial_M\Phi_1 A_2^M - \\ - \frac{D-1}{D}\Phi_1^* i\partial_M\Phi_1 A_1^M + \text{h.c.} \qquad (36)$$

Здесь используются те же самые обозначения для полей, что и в (24). При этом $\Phi_0$ – это поле с $\delta = D$. Очень важно, что пропагаторы векторных полей для данной диаграммы получились такие же, как и в предыдущем разделе.

**6.** Можно также вычислить еще несколько диаграмм с одной векторной внешней линией и двумя скалярными. Ответ всегда будет устроен аналогично (36).

Еще одно вычисление в теории с неабелевыми калибровочными полями в $D$ измерениях требует учета трех диаграмм (рис.3) (одна из них включает духи),

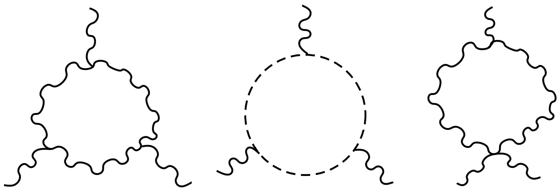

Рис.3. Однопетлевые диаграммы в теории неабелева калибровочного поля

но только две из них имеют форму подобную той, что изображена на рис.2. Неясно, как можно вычислить третью диаграмму. В этой работе не приводятся соответствующие вычисления для первых двух диаграмм из-за их громоздкости. Необходимо учитывать все три диаграммы, так как только их сумма будет калибровочно инвариантна.

Вычисления, описанные выше, могут пролить свет на то, как переписать однопетлевую диаграмму с четырьмя внешними линиями, поскольку теперь мы знаем, какие вершины имеются в дуальной теории. Есть и другая идея, как можно искать такое соответствие. Рассмотрим ситуацию, когда в петле бегает частица со спином и рассмотрим соответствующее математическое выражение в первично квантованной формулировке. Можно записать функциональный интеграл для частицы со спином, пользуясь только бозонными полями. Из-за геометричности такого функционального интеграла можно ожидать, что удастся что-то с ним сделать и переписать его в терминах теории в $AdS_{D+1}$.

Заметим, что формула (32) справедлива только при $D < 4$. На практике это означает, что можно рассматривать не только $D = 3$, но также и $D = 4 - 2\epsilon$ (размерная регуляризация). Формально граничный член, возникающий в интегрировании по частям в (31), равен нулю при любом $D < 4$, то есть предел $\epsilon \to +0$ конечен. Но мы знаем, что если вычислить диаграмму на рис.2с в размерной регуляризации, то расходимость останется. Нужно добиться лучшего понимания в этом вопросе.

Я благодарен А. Маршакову за полезные обсуждения и А. Горскому за полезные обсуждения и за руководство в этой работе.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов Росатома, гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 07-02-01161 и гранта НШ # 8004.2006.2.

1. J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
2. S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109].
3. E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].
4. R. Gopakumar, Phys. Rev. D **70**, 025009 (2004) [arXiv:hep-th/0308184].
5. R. Gopakumar, Phys. Rev. D **70**, 025010 (2004) [arXiv:hep-th/0402063].