УСЛОВИЯ КВАНТОВАНИЯ ДИРАКА И 3-КОЦИКЛ.

А.Б.Рыжов

Для рассеяния электрона монополем Дирака показано, что квантование произведения зарядов электрона и монополя не может быть получено из условия исчезновения соответствующего 3-коцикла.

В задаче рассеяния электрона на магнитном заряде μ условие квантования Дирака $2e\mu = n$ получается из требования однозначности склейки волновых функций, отвечающих разным калибровкам вектор-потенциала монополя. Функции склейки приводят нас к расслоениям Ву-Янга [1], которые нумеруются целыми числами n.

Джэкив [2], Гроссман [3], Ву и Зи [4] построили "неассоциативное представление" трансляций, мерой неассоциативности которого является 3-коцикл. Равенство нулю 3-коцикла с точностью до чисел кратных 2π, есть как раз условие квантования Дирака. Однако здесь будет показано (вопреки [2]), что исчезновение 3-коцикла не может быть использовано для получения условия Дирака, так как последнее неявно содержится в исходном представлении.

Напомним как получается условие квантования Дирака. Из-за неизбежных сингулярностей вектор-потенциала монополя сингулярности имеются в уравнении Шредингера и в волновой функции. Поэтому необходима по крайней мере пара калибровок вектор-потенциала, чтобы каждая точка из $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ лежала в области непрерывности хотя бы одной калибровки. Например, при $A_r = A_\theta = 0$, $A_\varphi = (\mu/r)\,\mathrm{tg}(\theta/2)$ нитью сингулярностей служит нижняя полуось $\theta = \pi$, а при $A_r = A_\theta = 0$, $A_\varphi = -(\mu/r)\mathrm{ctg}(\theta/2)$ – верхняя $\theta = 0$. Отличаются эти два описания на $2\mu\nabla\varphi(x)$, где φ - азимутальный угол. Но тогда волновые функции ψ и ψ' для уравнений Шредингера, отвечающих этим формам вектор потенциала, связаны калибровочным преобразованием $\psi(x) = \psi'(x)\exp(2ie\mu\varphi(x))$ в области $\theta \neq 0, \pi$. Однозначность функции склейки $\exp(2ie\mu\varphi)$ приводит к условию квантования Дирака $2e\mu = n$.

Построение 3-коцикла основывается на следующей конструкции [2-4]. Пусть на величины x действует группа $G: x \to gx$. Рассмотрим представление группы G в пространстве функций $\psi(x)$ такого вида

$$U(g)\,\psi(x) = \mathcal{A}_1(x,g)\,\psi(gx).$$

Пусть операторы $\mathcal{A}_1$ не следуют закону композиции в группе, т. е.

$$U(g_1)U(g_2)\,\psi(x) = \mathcal{A}_2(x,g_1,g_2)\,U(g_2g_1)\,\psi(x)$$

или

$$\mathcal{A}_1(x,g_1)\,\mathcal{A}_1(g_1x,g_2) = \mathcal{A}_2(x,g_1,g_2)\,\mathcal{A}_1(x,g_2g_1). \tag{1}$$

Предположим, что операторы $\mathcal{A}_2$ коммутируют и ассоциируют с операторами $\mathcal{A}_1$, однако, $\mathcal{A}_1$ не ассоциативны

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}_1(x,g_1)\,\mathcal{A}_1(g_1x,g_2)]\,\mathcal{A}_1(g_2g_1x,g_3) =\\ &= \exp(i\alpha_3(x,g_1,g_2,g_3))\,\mathcal{A}_1(x,g_1)[\mathcal{A}_1(g_1x,g_2)\,\mathcal{A}_1(g_2g_1x,g_3)].\end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы (2) было согласовано с (1) необходимо, чтобы α_3 удовлетворяла определенным условиям. Их можно найти так: домножить равенство (2) справа на $\mathcal{A}_1(g_3g_2g_1x,g_4)$ и применять попеременно (1) и (2). Получим

$$\begin{aligned}&\alpha_3(g_1x,g_2,g_3,g_4) - \alpha_3(x,g_2g_1,g_3,g_4) + \alpha_3(x,g_1,g_3g_2,g_4) -\\ &- \alpha_3(x,g_1,g_2,g_4g_3) + \alpha_3(x,g_1,g_2,g_3) = 0 \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

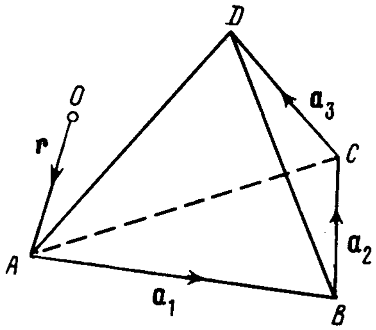
Это есть условие коцикличности для α_3 .

Напомним определение коцикла. Пусть оператор Δ переводит функцию $\alpha(x, g_1, ..., g_n)$ от n групповых аргументов в функцию $\Delta\alpha$ от $n+1$ группового аргумента по правилу

$$\Delta\alpha(x, g_1, \dots, g_n, g_{n+1}) = \alpha(g_1 x, g_2, \dots, g_{n+1}) - \alpha(x, g_2 g_1, \dots, g_{n+1}) +$$
$$+ \alpha(x, g_1, g_3 g_2, g_4, \dots, g_{n+1}) - \dots + (-1)^n \alpha(x, g_1, \dots, g_{n+1} g_n) +$$
$$+ (-1)^{n+1} \alpha(x, g_1, \dots, g_{n-1}, g_n).$$

Легко проверяется фундаментальное свойство $\Delta^2 = 0$. n-коцикл – это функция $\alpha(x, g_1, \dots, g_n)$, такая что $\Delta\alpha = 0$. Коцикл α тривиален, или является кограницей, если его можно представить в виде $\alpha = \Delta\beta$.

Мы получили, что в предположениях (1) и (2) на операторы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, функция α_3 является коциклом. Равенство нулю (с точностью до $2\pi n$) коцикла α_3 означает ассоциативность этого представления.



Тетраэдр $ABCD$, определенный радиус-вектором $\mathbf{r}$ и сдвигами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Точка 0 – место положения монополя

Далее такое представление рассматривается для задачи рассеяния заряженной частицы магнитным монополем. Вместо обычного действия группы грансляций

$$U(\mathbf{a})\,\psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{a}\mathbf{p})\,\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}+\mathbf{a}),$$

рассмотрим действие, определенное с помощью оператора обобщенного импульса $\mathbf{v} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}$ – вектор-потенциал монополя,

$$U(\mathbf{a})\,\psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{a}\mathbf{v})\,\psi(\mathbf{r}).$$

Записав

$$U(\mathbf{a})\,\psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{a}\mathbf{v})\exp(-i\mathbf{a}\mathbf{p})\,\psi(\mathbf{r}+\mathbf{a}),$$

найдем

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \exp\Big[-ie\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\mathbf{a}} \mathbf{A}(s)\,ds\Big],$$

где интегрирование проводится вдоль прямой, соединяющей $\mathbf{r}$ с $\mathbf{r}+\mathbf{a}$. Кроме того из (1) следует, что

$$\mathcal{A}_2(\mathbf{r}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \exp[-ie\Phi],$$

где Φ есть магнитный поток через треугольник $(\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{a}_1, \mathbf{r}+\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)$. Теперь рассмотрим тетраэдр $ABCD$ с вершинами $(\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{a}_1, \mathbf{r}+\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2, \mathbf{r}+\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)$, изображенный на рисунке.

Левую часть равенства (2) можно переписать в виде

$$[\mathcal{A}_1(\mathbf{r},\mathbf{a}_1)\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r}+\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)]\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r}+\ \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\ ) =$$
$$= \exp(-ie\Phi(ABC))\mathcal{A}_1(\mathbf{r},\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r}+\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3) = \quad (3)$$
$$= \exp(-ie\Phi(ABC))\exp(-ie\Phi(ACD))\mathcal{A}_1(\mathbf{r},\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)$$

Правая часть равенства (2) преобразуется аналогично

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{r},\mathbf{a}_1)[\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r}+\ \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r}\ +\mathbf{a}_1\ +\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3)] = \quad (4)$$

$$= \exp(i\alpha_3(\mathbf{r},\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3))\exp(-ie\Phi(BCD))\exp(-ie\Phi(ABD))\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r},\mathbf{a}_1+\ \mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3).$$

Сравнивая (3) и (4), получаем

$$\alpha_3 = -e\Phi(ABCD).$$

Если тетраэдр $ABCD$ не содержит монополь внутри или на границе, то $\alpha_3 = -4\pi e\mu$. При $2e\mu = n$ $\alpha_3 = -2\pi n$ и представление становится ассоциативным. Обратно, требование ассоциативности приводит к условию квантования $e\mu$.

Мы заметим, что для произведения операторов, понимаемого как композиция отображений, ассоциативность выполняется всегда, по определению. Какая же операция здесь дает жизнь 3-коциклу (неассоциативности)? В этой схеме замена $\mathcal{A}_1(\mathbf{r},\mathbf{a}_1)\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r}+\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ на $\mathcal{A}_2(\mathbf{r},\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r},\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)$ означает переход от суммы интегралов по отрезкам $[AB]$ и $[BC]$ к интегралу по отрезку $[AC]$ с добавлением интеграла по треугольнику от $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ по теореме Стокса. С учетом этого мы видим, что в равенстве (2) одна расстановка скобок отвечает за интегрирование по треугольникам ABC и ACD, а другая – за интегрирование по BCD и ABD. Авторы [2–4] не имеют ввиду глобальную калибровку (один вектор-потенциал), поскольку, когда монополь внутри тетраэдра, нить сингулярностей протыкает хотя бы одну грань, и для нее не выполняется теорема Стокса. В локальной калибровке этого можно избежать, только если сингулярности двух разных калибровок вектор-потенциала попадают на разные пары граней. Но локальный подход, как показано выше, уже подразумевает склеивание волновых функций и, следовательно, условие Дирака.

В [5] обращалось внимание на равенство нулю 3-коцикла, работы [6] посвящены математическим усовершенствованиям этой конструкции. Вопрос же о получении нового способа квантования не рассматривался.

Автор благодарит М.А.Соловьева за указание на работы [2–5] и И.С.Шапиро и А.Г.Савинкова за стимулирующие дискуссии.

Литература

1. *Wu T.T., Yang C.N.* Phys. Rev., 1975, **D12**, 3845.
2. *Jackiw R.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 159.
3. *Grossman B.* Phys. Lett., 1985, **152B**, 93.
4. *Wu Y.-S., Zee A.* Phys. Lett., 1985, **152B**, 98.
5. *Boulware D.G., Deser S., Zumino B.* Phys. Lett., 1985, **153B**, 307.
6. *Mickelsson J.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 2379; *Jackiw R.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 2380.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 декабря 1987 г.