*Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 4, стр. 181 – 184* *25 февраля 1988 г.*

# О ДВУХПЕТЛЕВОМ ВКЛАДЕ В ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНУЮ ФУНКЦИЮ В ТЕОРИИ СУПЕРСТРУН

*А.Морозов*

Построен прототип двухпетлевого вклада в четырехточечную функцию, удовлетворяющий требованиям модулярной инвариантности и конечности. Исследование факторизационных свойств предложенных выражений может оказаться достаточным для однозначного определения правильного ответа.

1. В последнее время были приложены значительные усилия для построения двухпетлевого исчисления в теории суперструн [1-3]. Было показано, что при специальных условиях, наложенных на выбор нечетных модулей 0, 1, 2 и 3-точечные функции обращаются в нуль (по крайней мере для внешних бозонных состояний), в согласии с общими ожиданиями [4]. Более важным шагом явилось бы вычисление первого неисчезающего выражения – вклада в 4-точечную функцию. Здесь мы приведем некоторые формулы, удовлетворяющие условиям модулярной инвариантности и конечности (и достаточно близкие по структуре к объектам, возникающим в двухпетлевых вычислениях), и потому способных быть прототипами реального выражения для 4-точечной функции. Весьма вероятно, что исследование факторизационных свойств этих формул на границе пространства модулей (где они должны совпасть с определенной однопетлевой амплитудой), позволит однозначно определить правильный ответ.

2. Большая часть вычислений в двухпетлевом приближении в теории струн до сих пор выполнена в гиперэллиптических координатах, поэтому мы тоже будем ими пользоваться (см., напр. [5]; переход к представлению, скажем, в терминах матриц периодов не представляет проблем. В этом представлении роль модулярной инвариантности играет проективная симметрия. Все естественные объекты являются рациональными функциями $z$ и $s(z) = \left[\prod_{i=1}^{2p+2}(z-a_i)\right]^{1/2}$ ($p$ – род поверхности), а проективные преобразования действуют по правилам: $z \to (Az+B)/(Cz+D)$; $a_i \to (Aa_i+B)/(Ca_i+D)$; $s(z) \to \dfrac{s(z)}{N^{1/2}(Cz+D)^3}$, $N = \prod_{i=1}^{2p+2}(Ca_i+D)$. Любая разность $z-z'$ преобразуется однородно: $z-z' \to (z-z')/(Cz+D)(Cz'+D)$.

Двухпетлевая мера для бозонной струны имеет вид $d\mu_{bos} = \dfrac{1}{G^{13}}\left|\dfrac{\Pi da/d\Omega}{(\Pi(a))^3}\right|^2$, где $\prod_{i=1}^{2p+2} da_i/d\Omega$ является проективно инвариантной мерой (а $d\Omega = da'da''da'''/(a'-a'')(a''-a''')\times(a'''-a')$ инвариантна сама по себе); $\Pi(a) = \prod_{i<j}(a_i-a_j)$; $G$ заменяет в этом представлении обычный $\det\operatorname{Im}T$: $G = |\det\sigma|^2 \det\operatorname{Im}T = \int\left|\dfrac{(v_1-v_2)dv_1dv_2}{s(v_1)s(v_2)}\right|^2$ Легко проверить, что при проективном преобразовании $\Pi da/d\Omega \to N^{-2}\Pi da/d\Omega$; $\Pi(a) \to N^{-5}\Pi(a)$; $G \to |N|^2 G$, и $d\mu_{bos}$ инвариантна.

3. В одной петле $d\mu_{bos} = \dfrac{1}{G_1^{14}}\left|\dfrac{\Pi da/d\Omega}{(\Pi(a))^3}\right|^2$ только на этот раз $G_1 = \int\left|\dfrac{dv}{s(v)}\right|^2$ и $G_1 \to |N|G_1$ при проективном преобразовании. Это выражение тоже инвариантно (оно совпадает с $(\operatorname{Im}\tau)^{-14}|d\tau/\eta^{24}(\tau)|^2$).

Простейшим ненулевым объектом в случае суперструны является 4-точечная функция $\langle \psi\tilde{\psi}(z_1)e^{ip_1X(z_1)} \dots \psi\tilde{\psi}(z_4)e^{ip_4X(z_4)} \rangle$, а соответствующая мера равна

$$\frac{1}{G_1^6}\left|\frac{\Pi da/d\Omega}{\Pi(a)}\ \frac{dz_1}{s(z_1)}\dots\frac{dz_4}{s(z_4)}\right|^2 \langle e^{ip_1X(z_1)}\dots e^{ip_4X(z_4)}\rangle \qquad (1)$$

(она совпадает с известной формулой $(\mathrm{Im}\tau)^{-6}|d\tau d\xi_1\dots d\xi_4|^2\langle e^{ip_1X(\xi_1)}\dots e^{ip_4X(\xi_4)}\rangle$). Это выражение модулярно инвариантно и, более того, при интегрировании по пространству модулей оно приводит к *конечному* ответу. В принципе сингулярности могли бы возникать на границе пространства модулей, когда $a_i - a_j \sim \sqrt{t_{ij}} \to 0$ для каких-то $i \neq j$. В этом пределе $\frac{\Pi da/d\Omega}{\Pi(a)} \sim \frac{dt}{t} = d\ln t$, а $G_1 \sim \ln t$. Вторая асимптотика объясняется тем, что $s(v) \to (v-a_i)[\prod_{k\neq i,j}(v-a_k)]^{1/2}$, и поэтому интеграл, определяющий $G_1$, логарифмически расходится. Аналогичные логарифмические расходимости возникают из интегрирований по $dz_\alpha/s(z_\alpha)$. Поэтому (при $p_1 = \dots = p_4 = 0$) однопетлевая мера ведет себя как $\frac{d\ln t}{(\ln t)^6}(\ln t)^4 \sim \frac{d\ln t}{(\ln t)^2} = -d(1/\ln t)$, и $1/\ln t$ конечно в пределе $t \to 0$.

**4.** Аналогичный переход от бозонной статистической суммы к суперструнной 4-частичной амплитуде более сложен. Прямой аналог (1),

$$\frac{1}{G^5}\left|\frac{\Pi da/d\Omega}{\Pi(a)}\ \frac{dz_1}{s(z_1)}\dots\frac{dz_4}{s(z_4)}\right|^2 \qquad (2)$$

(здесь и далее $p_1 = \dots = p_4 = 0$; нетрудно восстановить $p$-зависимость, хотя при этом требуется некоторая аккуратность [6]), не проходит из-за проективной неинвариантности: это выражение умножается на $|(Cz_1 + D)\dots(Cz_4 + D)|^2$. В [3] на основе предварительного анализа формализма Грина – Шварца было предложено домножить (2) на

$$\left|\sum_{i\neq j}\frac{(z_1-a_i)(z_2-a_i)(z_3-a_j)(z_4-a_j)}{(a_i-a_j)^2} + \text{перестановки } z_1, z_2, z_3, z_4\right|^2, \qquad (3)$$

что приводит, в частности, к восстановлению проективной инвариантности. К сожалению, умножение на (3) приводит к возникновению дополнительного полюса $1/t$ (полное выражение $\sim dt/t^2$), что противоречит конечности.

Такой анзатц не вполне удовлетворителен также и с точки зрения *NSR*-формализма, поскольку он явно не учитывает возможные вклады от $\langle \partial X\, \partial X\rangle$-части коррелятора суперток. (Отметим, что в подходе Грина –Шварца подобные вклады также могут появляться). Чтобы представить себе структуру таких вкладов, полезно взглянуть на формулу для коррелятора $\langle \partial X(a)\partial X(b)\rangle$ в гиперэллиптических координатах. В терминах грассмановых полей $\xi$ и $\eta$, являющихся соответственно 0- и 1-дифференциалами, имеем:

$$\langle \partial X(a)\partial X(b)\rangle = \int \partial\xi(a)\partial\bar{\xi}(b)e^{\int\bar{\xi}\Delta\xi}D\bar{\xi}D\xi \Big/ \int e^{\int\bar{\xi}\Delta\xi}D\bar{\xi}D\xi + (a \longleftrightarrow b) =$$

$$= \int \partial\xi(a)e^{\int\eta\bar{\partial}\xi}D\xi D\eta \int \partial\bar{\xi}(b)e^{\int\bar{\eta}\partial\bar{\xi}}D\bar{\xi}D\bar{\eta}e^{\int\eta\bar{\eta}} \Big/ \int e^{\int\eta\bar{\partial}\xi}e^{\int\bar{\eta}\partial\bar{\xi}}e^{\int\eta\bar{\eta}}D\xi D\eta D\bar{\xi}D\bar{\eta} +$$

$$+ (a \longleftrightarrow b) = \int_{d^2 v_1 d^2 v_2} \langle \partial\xi(a)\eta(b)\eta(v_1)\eta(v_2)\rangle \langle \bar\eta(v_1)\bar\eta(v_2)\rangle \Big/ \int_{d^2 v_1 d^2 v_2} \langle \eta(v_1)\eta(v_2)\rangle\langle\bar\eta(v_1)\bar\eta(v_2)\rangle +$$

$$+ (a \longleftrightarrow b) = \int \left\{ \left| \frac{(v_1 - v_2) dv_1 dv_2}{s(v_1)s(v_2)} \right|^2 \frac{1}{s(b)} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{(b - v_1)(b - v_2)}{(a - b)(a - v_1)(a - v_2)} \times \right.\right.$$

$$\times \left( s(a) + s(b) \frac{(a - v_1)(a - v_2)}{(b - v_1)(b - v_2)} + s(v_1) \frac{(a - b)(a - v_2)}{(v_1 - b)(v_1 - v_2)} + \right.$$

$$\left.\left.\left. + s(v_2) \frac{(a - b)(a - v_1)}{(v_2 - b)(v_2 - v_1)} \right) \right] \right\} \Big/ \int \left| \frac{(v_1 - v_2) dv_1 dv_2}{s(v_1)s(v_2)} \right|^2 + (a \longleftrightarrow b).$$

(числитель в последней формуле совпадает с $G$). Если поверить в общие аргументы, приведенные в [2], то в ответ входят только вычеты этого коррелятора в совпадающих точках (т. е. какая-то комбинация из коэффициентов при $(a-b)^{-2}$, $(a-b)^0$ и $(a-b)^2$), а тогда нетрудно согласиться с тем, что (2) может домножаться не только на структуры типа (3), но и на (неаналитические) выражения типа

$$\left| \sum_{i \neq j} \frac{(z_1 - a_i)(z_2 - a_i)(z_3 - a_j)(z_4 - a_j)}{(a_i - a_j)^2} \int \left[ \frac{(v_1 - a_j)(v_2 - a_i)}{(v_1 - a_i)(v_2 - a_j)} + (v_1 \longleftrightarrow v_2) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left| \frac{(v_1 - v_2) dv_1 dv_2}{s(v_1)s(v_2)} \right|^2 \Big/ G + \text{перестановки } z_1, z_2, z_3, z_4 \right|^2 \qquad (4)$$

Комбинируя (3) и (4) можно добиться сокращения лишнего $1/t$ полюса и получить вместо (2):

$$\frac{1}{G^7} \left| \frac{\Pi da/d\Omega}{\Pi(a)} \frac{dz_1}{s(z_1)} \cdots \frac{dz_4}{s(z_4)} \int \sum_{i \neq j} \frac{(z_1 - a_i)(z_2 - a_i)(z_3 - a_j)(z_4 - a_j)}{(v_1 - a_i)(v_1 - a_j)(v_2 - a_i)(v_2 - a_j)} (v_1 - v_2)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \left| \frac{(v_1 - v_2) dv_1 dv_2}{s(v_1)\, s(v_2)} \right|^2 + \text{перестановки } z_1, z_2, z_3, z_4 \right|^2 .$$

Эту формулу мы рассматриваем как прототип двухпетлевого вклада в 4-точечную функцию. Конечно, имеются другие выражения такого типа, обладающие проективной инвариантностью (например, можно заменить $a_j$ в (5) на $a_i$, и двойное суммирование $\sum_{i \neq j}$ – на однократное $\sum_i$). Условие факторизации, связывающие двухпетлевую амплитуду с однопетлевой (с дополнительной дилатонной вставкой), должно отобрать правильный ответ.

5. Отметим, что выражения типа (5), представляющиеся весьма естественными с точки зрения двухпетлевых вычислений, не столь хороши в смысле конечности, как их однопетлевые аналоги. В этих выражениях нет тахионных сингулярностей, но дилатонные оказываются существенными. Дело в том, что в (2) входит только 5-я степень $G$, и поэтому (5) ведет себя как $[(d\ln t)/(\ln t)^5](\ln t)^4 = d(\ln\ln t)$. К счастью, для ненулевых внешних импульсов $p_\alpha p_\beta < 0$ возникают вклады бозонных корреляторов, $\exp p_\alpha p_\beta \langle X(z_\alpha) X(z_\beta)\rangle$, обращающиеся в нуль при совпадении $z_\alpha$ и $z_\beta$. Поэтому по-крайней мере одна из логарифмических расходимостей, появляющихся в пределе $z_\alpha, z_\beta \to a_i$ исчезает, и ответ оказывается конечным. Это рассуждение, по-видимому, очень близко к аргументам работы [6].

## Литература


1. *Verlinde E., Verlinde H.* Phys. Lett., 1987, **192B** , 95; *Книжник В.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **46**, 8. *Atick J., Rabin J., Sen A.* Preprint IASSNS-87/45; *Переломов А. и др.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **46**, 125; Preprint ITEP-87/104; *Морозов А.* Препринт ИТЭФ-87/207.
2. *Moore G. et al.* Preprint IASSNS-87/47.
3. *Каллош Р. и др.* Препринт ИТЭФ-87.
4. *Martinec E.* Phys. Lett., 1986, **171B**, 189.
5. *Лебедев Д. и др.* Препринт ИТЭФ-87/16.
6. *Green M., Seiberg N.* Preprint IASSNS-87/38.



Институт теоретической и экспериментальной физики
Академии наук СССР



Поступила в редакцию
25 января 1988 г.