Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 4, стр. 207 – 209 *25 февраля 1988 г.*

СВОЙСТВА СВЕРХТЕКУЧИХ СИСТЕМ С КРАТНЫМИ НУЛЯМИ В СПЕКТРЕ ФЕРМИОНОВ

Г.Е.Воловик, В.А.Конышев

Исследуется аномальное поведение сверхтекучих систем, в которых энергетическая щель обращается в нуль в дьявольских точках с кратным топологическим зарядом.

Сверхтекучие жидкости ^{3}He-A и ^{3}He-A_1, а также возможно и некоторые сверхпроводники [1 – 3], имеют нули в спектре фермионных возбуждений, приводящие к сингулярностям в низкотемпературных свойствах этих систем. Наиболее интересные свойства, сходные с явлением киральной аномалии [4, 5], возникают в том довольно распространенном случае, когда нуль является дьявольской точкой спектра (точка касания двух конусов, diabolo [6]), т. е. является топологически неустранимой точкой касания двух ветвей спектра [7 – 9], в данном случае ветви квазичастиц и ветви квазидырок [10].

В некоторых классах сверхтекучести и сверхпроводимости, таких как наведенное дипольным взаимодействием f-состояние в ^{3}He-A_1 [11] и класс $D_6(C_2)$ синглетной сверхпроводимости, который может осуществляться в UPt_3, дьявольские точки являются кратными. Мы выясним, как кратность нуля меняет аномальные свойства.

При рассмотрении дьявольской точки можно ограничиться двухуровневым гамильтонианом, описывающим именно те две ветви спектра (квазичастичную и дырочную), которые испытывают контакт в дьявольской точке, и не учитывать другие ветви. Поэтому соответствующий боголюбовский гамильтониан вблизи дьявольской точки $\mathbf{k}_0$ в импульсном пространстве $\mathbf{k}$ не содержит спиновых или зонных индексов:

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon(\mathbf{k}) & \Delta(\mathbf{k}) \\ \Delta^*(\mathbf{k}) & -\epsilon(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \tau\,\mathbf{m}(\mathbf{k}). \quad (1)$$

Здесь $\epsilon(\mathbf{k})$ – энергетический спектр в нормальном состоянии, отсчитываемый от ферми-поверхности, $\Delta(\mathbf{k})$ – зависящая от импульса щель, а компоненты вектора $\mathbf{m}(\mathbf{k})$ дают разложение H по двухрядным матрицам Паули $\vec{\tau}$, так что спектр частиц и дырок $E_\pm = \pm|\mathbf{m}(\mathbf{k})|$, причем в самой дьявольской точке $E_+(\mathbf{k}_0) = E_-(\mathbf{k}_0) = 0$.

Топологический инвариант N, показывающий кратность нуля, или кратность касания двух ветвей, определяется интегралом по замкнутой поверхности σ, охватывающей дьявольскую точку:

$$N = \frac{1}{8\pi}\int_\sigma dS_i e_{ijk}\,|\mathbf{m}|^{-3}\left(\mathbf{m}\left[\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial k_j}, \frac{\partial\mathbf{m}}{\partial k_k}\right]\right)^N. \quad (2)$$

В простейшей реализации дьявольских точек с топологическими зарядами $\pm N$

$$\epsilon(\mathbf{k}) = v_F(k - k_F),\ \Delta(\mathbf{k}) = \Delta_0\left(\frac{k_x + ik_y}{k_F}\right)^N, \quad (3)$$

точка $\mathbf{k}_{01} = k_F\hat{\mathbf{z}}$ имеет заряд N, а точка $\mathbf{k}_{02} = -k_F\hat{\mathbf{z}}$ – заряд $-N$. В сверхтекучем ^{3}He это соответствует куперовскому спариванию в состояние с проекцией орбитального момента $L_z = N$ на ось z.

Особенности в ^{3}He-A, возникающие из-за дьявольских точек с $N = 1$, хорошо известны, поскольку гамильтониан (1) в этом случае линеен по $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ вблизи $\mathbf{k}_0$ $(m_a(\mathbf{k}) = e^i_a(k_i - k_{0i}))$ и по своей структуре соответствует гамильтониану безмассового кирального электрона, движущегося в поле электромагнитного векторного потенциала $\mathbf{A} = \mathbf{k}_0(r, t)$ [4, 10]. В случае сверхтекучего ^{3}He-A_1 квазичастицы с параллельными магнитному полю спинами имеют дьявольскую точку в спектре с $N=3$ [11], а в случае синглетного $D_6(C_2)$ класса сверхпроводимости [2] $N=2$. Поэтому имеет смысл рассмотреть аномалии в поведении систем с произвольным N, где прямой аналогии с квантовой электродинамикой (КЭД) нет. Здесь мы приведем основные результаты.

1. **Нуль-зарядный эффект** [4] сохраняется и при произвольном N, несмотря на отличие от КЭД. Разложение свободной энергии F по градиентам положения дьявольской точки $\mathbf{k}_0(\mathbf{r},t)$, или, что то же самое, по градиентам вектора $\mathbf{l}(\mathbf{r},t)$, указывающего направление орбитального момента импульса куперовских пар ($\mathbf{k}_0 = \pm k_F\mathbf{l}(\mathbf{r},t)$), имеет логарифмическую расходимость при $T\to 0$:

$$F_3 = K_3 \int d^3x\,[\mathbf{l}, \mathrm{rot}\,\mathbf{l}]^2, \qquad K_3 = N\,\frac{v_F k_F^2}{24\pi^2}\ln\frac{\Delta_0^2}{T^2}, \tag{4}$$

что соответствует КЭД с N заряженными безмассовыми фермионами.

2. **Действие Весса-Зумино** для орбитальной динамики вектора $\mathbf{l}$ [12] можно записать в общем виде, как фазу Берри, через функцию Грина $G=(\omega-H)^{-1}$ и дополнительную координату x^5 (см., например, [13])

$$S_{WZ} = \frac{1}{8\pi}\sum_{\mathbf{k}}\int d\omega dt dx^5\,\mathrm{Sp}(G\partial_\omega G^{-1}G\partial_t G^{-1}G\partial_5 G^{-1} - t\longleftrightarrow x^5) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{k}}\int dt dx^5\,|\mathbf{m}|^{-3}(\mathbf{m}[\partial_t\mathbf{m},\,\partial_5\mathbf{m}]). \tag{5}$$

Это действие, помимо естественного для сверхтекучести члена $\frac{\hbar}{2m_3}\rho\dot{\Phi}$ ($2m_3$ – масса куперовской пары, ρ – плотность жидкости, Φ – фаза конденсата), содержит также следующий вклад от дьявольских точек, положение которых $\mathbf{k}_a(\mathbf{r},t,x^5)$ зависит от $\mathbf{r},t,x^5$:

$$S_{WZ} = \frac{1}{24\pi^2}\sum_a N_a\int d^3x dt dx^5\,(\mathbf{k}_a[\partial_t\mathbf{k}_a,\,\partial_5\mathbf{k}_a]), \tag{6а}$$

где N_a – топологический заряд a-ой точки. В случае двух дьявольских точек типа (3) с $\mathbf{k}_a=\pm k_F\mathbf{l}$ это приводит к умноженному на N выражению, найденному в [12] для случая $N=1$:

$$S_{WZ} = \frac{1}{2}NC_0\int d^3x dt dx^5(\mathbf{l}[\partial_t\mathbf{l},\,\partial_5\mathbf{l}]), \qquad C_0 = \frac{k_F^3}{3\pi^2}. \tag{6б}$$

Благодаря этому дополнительному вкладу в действие динамический момент импульса $\mathbf{L}_0$ жидкости существенно меньше своего естественного значения $\hbar N\rho/2m_3$:

$$\mathbf{L}_0 = \frac{1}{2}\hbar N\left(\frac{\rho}{m_3} - C_0\right)\mathbf{l}. \tag{7}$$

3. **Аномальный ток** [4,5] также умножается на N. То же происходит и с аномальным источником тока $\mathbf{I}$, описывающим передачу импульса от сверхтекучего движения к нормальному [14,15] и имеющим точную аналогию с источником кирального заряда в КЭД [4]:

$$\mathbf{j}_{anom} = -\frac{1}{2}NC_0\mathbf{l}(\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}), \qquad \mathbf{I} = \frac{3}{2}NC_0\mathbf{l}(\partial_t\mathbf{l}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{l}). \tag{8}$$

4. **Плотность нормальной компоненты при** $T=0$ в присутствии противотока $\mathbf{w}=\mathbf{v}_s-\mathbf{v}_n$ находится из выражения для некогерентного тока нормальных возбуждений, описывающихся при $T=0$ ступенчатой θ-функцией распределения: $\mathbf{j}_{inc} = \sum_{\mathbf{k}}\mathbf{k}\theta(\mathbf{kw}-E(\mathbf{k}))$, где энергия E согласно (3) равна $E^2=\epsilon^2+\Delta_0^2\frac{[\mathbf{k},\mathbf{l}]^{2N}}{k_F^{2N}}$. При $w\ll\frac{\Delta_0}{k_F}$ имеем для продоль-

ной плотности нормальной компоненты $\rho_{n\|}$ следующее выражение:

$$\mathbf{j}_{inc} = \rho_{n\|}\mathbf{l}(\mathbf{l}\mathbf{w}), \qquad \rho_{n\|} = N_F k_F^2 (k_F(\mathbf{l}\mathbf{w})/\Delta_0)^{2/N} \frac{1}{2N} B(1/N, 3/2), \tag{9}$$

где N_F — плотность состояний в нормальной ферми-жидкости.

5. **Плотность состояний.** Из (9) следует, что плотность состояний на ферми-поверхности $N(0)$ конечна в присутствии противотока и имеет порядок

$$N(0) \sim N_F (k_F(\mathbf{l}\mathbf{w})/\Delta_0)^{2/N}. \tag{10}$$

Используя (10), можно найти $N(0)$ в сверхпроводниках второго рода в присутствии достаточно сильного магнитного поля H, когда расстояние между вихрями Абрикосова меньше глубины проникновения. В этом случае w спадает как $1/r$ вне кора вихря и, если магнитное поле не параллельно вектору $\mathbf{l}$, то межвихревая область дает следующий вклад в плотность состояний:

$$N(0) \sim N_F \frac{H}{H_{c2}} \ln \frac{H}{H_{c2}}, \quad N=1; \quad N(0) \sim N_F \left(\frac{H}{H_{c2}}\right)^{1/N}, \quad N>1. \tag{11}$$

Если же $\mathbf{H} \parallel \mathbf{l}$, так что $\mathbf{w}\mathbf{l} = 0$, то, как и в сверхпроводниках без дьявольских точек, вклад в $N(0)$ дают только коры вихрей, приводя к линейной зависимости $N(0)$ от магнитного поля [16]: $N(0) \sim N_F(H/H_{c2})$. Отметим, что в UPt_3 был обнаружен линейный по H вклад в плотность состояний [17], но при $\mathbf{H}$, направленном вдоль гексагональной оси, т. е. вдоль возможного вектора $\mathbf{l}$. Поэтому для выяснения вопроса о существовании и типе нулей нужно провести эксперимент с затуханием ультразвука в наклонных к оси магнитных полях. То же относится и к теплоемкости, которая в отсутствие поля $\sim T^{1+(2/N)}$, а в поле зависит как от величины, так и от направления поля.

6. **Плотность состояний в текстуре вектора** $\mathbf{l}$ получена здесь в квазиклассическом приближении, как это было сделано в [14] для случая $N=1$ (отметим, что при $N=1$ результат квазиклассического приближения отличается множителем 2 от точного результата [15]):

$$N(0) \sim N_F(|[\mathbf{l}, \operatorname{rot}\mathbf{l}]|\, v_F / \Delta_0)^{2/(N+1)}. \tag{12}$$

Литература

1. *Lee P.A., Rice T.M., Serene J.W. et al.* Comm. Cond. Matt. Phys., 1986, **12**, 99.
2. *Воловик Г.Е., Горьков Л.П.* ЖЭТФ, 1985, **88**, 1412.
3. *Sigrist M., Rice T.M.* Z. Phys. B, 1987, **68**, 9.
4. *Воловик Г.Е.* ЖЭТФ, 1987, **92**, 2116.
5. *Балацкий А.В., Конышев В.А.* ЖЭТФ, 1987, **92**, 841.
6. *Berry M.V., F.R.S., Wilkinson M.* Proc. Roy. Soc., 1984, **A392**, 15.
7. *Von Neumann J., Wigner E.P.* Phys. Z., 1929, **30**, 467.
8. *Новиков С.П.* ДАН СССР, 1981, **257**, 538.
9. *Avron J.E., Seiler R., Simon B.* Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 51.
10. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **46**, 81.
11. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **45**, 548.
12. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **44**, 144.
13. *Aoki H., Ando T.* Phys. Rev. Lett., 1986, **57**, 3093.
14. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* ЖЭТФ, 1981, **81**, 989.
15. *Combescot R., Dombre T.* Phys. Rev. B, 1986, **B33**, 79.
16. *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968,
17. *Qian Y.J., Xu M.-F., Schenstrom A. et al.* Solid State Comm., 1987, **63**, 599.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 января 1988 г.