

О ХАРАКТЕРЕ ВОЛНОВОГО КОЛЛАПСА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В.Е. Захаров, В.Ф. Швец

Для изучения структуры особенности вблизи критического волнового коллапса (в частности, вблизи фокуса стационарной самофокусировки) применен новый прием численного моделирования, позволяющий достичь рекордных превышений по квадрату амплитуды $\sim 10^{18}$. Показано, что в особенность попадает энергия, равная критической. Обсуждается закон приближения к точке коллапса.

1. Во многих физических ситуациях волновой коллапс описывается нелинейным уравнением Шредингера, которое в случае максимальной симметрии имеет вид (d — размерность пространства)

$$i\psi_t + \frac{d-1}{r}\psi_r + \psi_{rr} + |\psi|^s\psi = 0, \quad \psi_r|_{r=0} = 0; \quad \psi \rightarrow 0 \quad (1)$$

Коллапс имеет место при $sd \geq 4$, критический случай отвечает равенству $sd = 4$. Важнейшим физическим примером критического коллапса является стационарная самофокусировка света ($d = 2, s = 2$).

Уравнение (1) более двух десятилетий подвергается численному интегрированию (см.¹⁻⁷ и указанную там литературу). На основании численного эксперимента в работе ¹ была предложена гипотеза "движущихся фокусов", эквивалентная концепции коллапса (строгое доказательство существования коллапса дано в работе ⁸). Принципиальное физическое значение, прежде всего с точки зрения эффективности коллапса как механизма диссипации волновой энергии, имеет вопрос о характере возникающей при коллапсе особенности. В статье ² была предложена при $t \rightarrow t_0$ (t_0 — момент коллапса) автомодельная асимптотика

$$|\psi(r, t)| \rightarrow [f(t_0 - t)]^{-d/2} R\left(\frac{r}{f(t_0 - t)}\right), \quad f(0) = 0 \quad (2)$$

(здесь $R(\eta)$ — стационарный солитон, удовлетворяющий уравнению $R_{\eta\eta} + \frac{d-1}{\eta}R_{\eta} - R + R^{\frac{4+d}{d}} =$

$= 0$, $R_\eta \Big|_{\eta=0} = 0$; $R \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0$), означающая, что коллапс является сильным – независимо от начальных условий в точке коллапса поглощается фиксированная энергия

$$N_{кр} \sim \int_0^\infty \eta^{d-1} R^2(\eta) d\eta.$$

Степень приближения к коллапсу измеряется величиной $p = |\psi / \psi_0|^2$. В работе ⁷ было достигнуто $p_{max} \sim 10^9$. Большинство численных экспериментов подтверждает гипотезу (2), хотя в работе ⁹ приводились данные о том, что при специальном выборе начальных условий ("платообразные" пучки) в коллапсе может поглощаться энергия, существенно превышающая критическую. Относительно вида функции $f(t)$ у разных авторов имеются значительные разногласия.

2. Мы проводили численное интегрирование уравнения (1), используя следующий прием. Заменой переменных

$$\xi = rA(\tau), \quad d\tau/dt = A^2(\tau); \quad A(\tau) = |\psi(0, \tau)|^{s/2} \quad (3)$$

уравнение (1) приводится к виду

$$i\psi_\tau + \psi_{\xi\xi} + \left(\frac{d-1}{\xi} + i\xi \frac{\partial \ln A}{\partial \tau} \right) \psi_\xi + \frac{1}{A^2} |\psi|^s \psi = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) решалось на фиксированном отрезке $0 \leq \xi \leq L$, длина которого выбиралась таким образом, чтобы перепад $\left| \frac{\psi(0, \tau)}{\psi(L, \tau)} \right|^2$ был достаточно большим (в наших

экспериментах он составлял приблизительно шесть порядков). При этом скорость изменения амплитуды ψ в центре намного превышала скорость ее изменения на краю интервала интегрирования, что позволило при выборе граничного условия считать поле на правой границе "замороженным" (методические подробности будут опубликованы отдельно). В качестве начального условия рассматривались функции вида

$$\psi(r, 0) = \psi_0 \exp \left[-\left(\frac{r}{e} \right)^n \right], \quad \text{Im } \psi_0 = 0,$$

позволяющие моделировать как "гауссовы" ($n = 2$), так и, в терминах ⁹ "платообразные" ($n \geq 1$) пучки. Расчеты проводились для большого числа вариантов с широкой вариацией параметров ($d = 1, 2$, $1 \leq \psi_0 \leq 10$, $1 \leq l \leq 8$, $2 \leq n \leq 10$), представленные ниже на рисунках результаты соответствуют $d = 2$ и вариантам I – $n = 2$, $\psi_0 = 4$, $l = 1$; II – $n = 8$, $\psi_0 = 10$, $l = 1$; III – $n = 10$, $\psi_0 = 1,34$, $l = 8$. Расчеты проводились с использованием вычислительных средств ИКИ АН СССР.

Выбранный нами метод позволил достичь рекордных значений $p_{max} \sim 10^{18}$. Во всех случаях уверенно наблюдался выход на автомодельную асимптотику (2). При достаточном приближении к точке коллапса в центре формировался сжимающийся автомодельно пик, форма которого с высокой точностью совпадает с формой стационарного солитона (рис. 1). Независимо от начальных условий, в коллапсе при этом попадает энергия, равная критической (рис. 2). Таким образом, гипотеза (2) эффективно подтверждается.

3. Результаты расчетов подтвердили ^{3, 4, 7}, что в рамках модели $f(t_0 - t) = (t_0 - t)^\mu$ значение $\mu = 1/2$ является наиболее точным, любое изменение показателя $\mu > 1/2$ резко завышает рост амплитуды.

Определим растущую при $z \rightarrow \infty$ функцию $g(z)$ условием $\tau = g(|\ln(t_0 - t)|)$, тогда

$$f^2(t_0 - t) \rightarrow c \frac{t_0 - t}{g'(|\ln(t_0 - t)|)}, \quad Q(\tau) \equiv \ln A^2(\tau) \rightarrow g^{-1}(\tau) + \ln g'(g^{-1}(\tau)).$$

Поскольку функция $f^2(t)$ близка к линейной, для $g(z)$ разумно принять аппроксимацию (см. 7) $g(z) \sim z^{1+\gamma}$ ($\gamma = 0$ соответствует закону $f^2 = t_0 - t$), $Q(\tau) \sim \tau^{1/(1+\gamma)}$ при $\tau \rightarrow \infty$. В работах 4, 5 предложено значение $\gamma = 1$. Тщательная обработка результатов наших расчетов показывает (графики $Q(\tau)$ представлены на рис. 2), что значение γ варьирует от варианта к варианту и заключено в пределах $0,35 \leq \gamma \leq 0,65$.

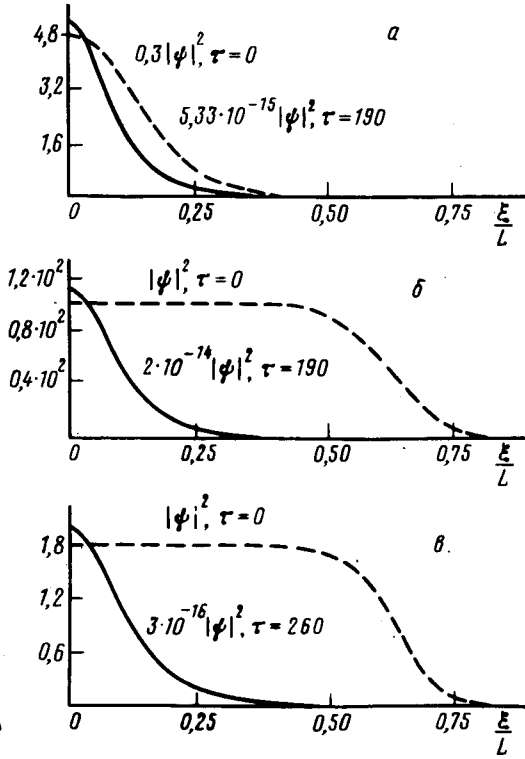


Рис. 1

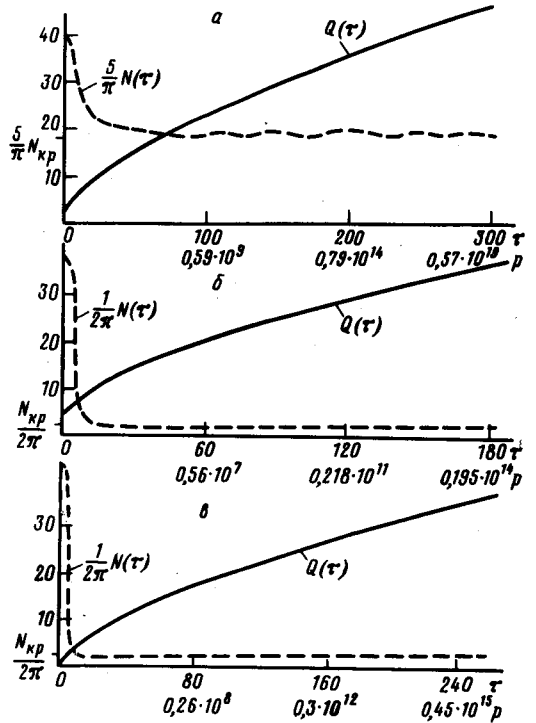


Рис. 2

Рис. 1. Пространственная структура амплитуды волнового поля: а – вариант I, б – вариант II, в – вариант III

Рис. 2. Зависимости от времени захватываемой в коллапс энергии $N(\tau)$ и функции $Q(\tau)$ (p – превышение по квадрату амплитуды): а – вариант I, б – вариант II, в – вариант III

Авторы благодарны Е.А.Кузнецову за внимание к работе и полезные обсуждения, И.В.Петрову и Н.Е.Косматову за существенную помощь при проведении расчетов и интерес к работе, Н.Г. Кожелуповой за помощь при обработке результатов.

Литература

1. Дышко А.Л., Луговой В.Н., Прохоров А.М. Письма в ЖЭТФ, 1967, 6, 655.
2. Захаров В.Е., Сынах В.С. ЖЭТФ, 1975, 68, 940.
3. Десярев Л.М., Крылов В.И. ЖВМ и МФ, 1977, 17, 523; ДАН СССР, 1978, 241, 64.
4. Власов С.Н., Пискунова Л.В., Таланов В.И. ЖЭТФ, 1978, 75, 1602.
5. Wood D. Stud. Appl. Math., 1984, 71, 103.
6. Rypdal K., Rasmussen J.J., Thomsen K. Physica, 1985, 16D, 339; Rypdal K., Rasmussen J.J. Physica Scripta, 1986, 33, 498.
7. McLanghlin D.W., Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L. Phys. Rev., 1986, 34A, 1200.

8. *Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И.* Радиофизика, 1971, 14, 1353.

9. *Амосов А.А., Бахвалов Н.С., Владимиров М.В. и др.* ИАН сер. физ., 1981, 45, 1423.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика"
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 декабря 1987 г.
