Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 6, стр. 283 – 286 *25 марта 1988 г.*

ТРЕХПЕТЛЕВАЯ β-ФУНКЦИЯ МОДЕЛИ ВЕССА – ЗУМИНО – ВИТТЕНА

С.В.Кетов

Для модели Весса– Зумино – Виттена вычислена трехпетлевая β-функция ренормгруппы, которая согласуется с непертурбативными результатами конформной теории поля для производной β-функции в критической точке.

В этой статье приведены результаты вычисления трехпетлевой β-функции ренормгруппы двумерной модели Весса – Зумино – Виттена (WZW), полученные по теории возмущений.

Пусть поле $U(x)$ принимает значения в компактной и полупростой группе G

$$U(x) = \exp[i\phi(x)], \qquad \phi(x) = \phi^i(x)\,T^i\,, \tag{1}$$

где T^i суть генераторы G со структурными константами f_{ijk}. Тогда действие WZW-модели записывается в виде [1]

$$I[U] = \frac{1}{4\lambda^2}\int d^2x\,\mathrm{tr}\,\partial_\mu U\partial^\mu U^{-1} + n\Gamma[U]\,, \tag{2}$$

где $\Gamma[U]$ известен как WZW-член [2-3], λ^2-константа связи. Ввиду многозначности Γ условия непротиворечивости квантовой теории приводят к квантованию константы связи перед WZW-членом, в результате чего n оказывается целым (либо полуцелым) числом [3].

Отметим, что в $A \times A$-взаимодействиях есть примеры событий (см. [4]) с большой азимутальной асимметрией того же типа, что и рассмотренная нами.

Теория (2) может быть переформирована как двумерная нелинейная σ-модель с кручением [3]

$$I[\phi] = \frac{1}{2\lambda^2} \int d^2x \, \{ g_{ab}(\phi) \, \partial^\mu \phi^a \partial_\mu \phi^b + \frac{2n}{3} h_{ab}(\phi) \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b \} , \tag{3}$$

для которой тензор кривизны R_{abcd}, построенный по метрике g_{ab}, кручение $(S \sim dh) S_{abc}$ и тензор кривизны $\hat{R}_{abcd}$ с учетом кручения S имеют вид [3]

$$R_{abcd} = f_{ijm} f_{klm} V_a^i V_b^j V_c^k V_d^l , \tag{4}$$

$$S_{abc} = \eta f_{ijk} V_a^i V_b^j V_c^k ,$$

$$\hat{R}_{abcd} = (1 - \eta^2) f_{ijm} f_{klm} V_a^i V_b^j V_c^k V_d^l ,$$

где $V_a^i(\phi)$ суть локальный базис ("тетрада"), ассоциированный с метрикой $g_{ab}(\phi)$, $\eta \equiv \equiv n\lambda^2/2\pi$.

В работе [1] на основе алгебры токов аргументирована конформная инвариантность квантовой WZW-модели в критической точке ($\eta^2 = 1$), т. е. для параллелизованного ($\hat{R}_{abcd} = = 0$) группового многообразия, что позволило далее авторам [4] эффективно применить к этому случаю методы конформной теории поля.

Вне критической точки конформная инвариантность отсутствует, поэтому основное значение приобретают пертурбативные методы вычислений, основанные на ковариантном методе фонового поля для двумерных нелинейных σ-моделей с кручением [3].

Следствием перенормируемости теории (2) является структура l-петлевого ковариантного контрчлена

$$\Delta I^{(l)} = \frac{(\lambda^2)^{l-1}}{2} \int d^2x \, T_{ab}^{(l)} (\delta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b , \tag{5}$$

где $T_{ab}^{(l)}$ имеет вид

$$T_{ab}^{(l)} = \sum_{n=1}^{l} \frac{1}{(2\epsilon)^n} T_{ab}^{(n,\, l)}(R, S) . \tag{6}$$

Квантовые вычисления по теории возмущений для теории (3) требуют ультрафиолетовой и инфракрасной регуляризаций. Последняя легко реализуется с помощью введения в теорию вспомогательного массового члена. Использование размерной регуляризации для УФ-расходимостей требует предписания для обращения с $\epsilon^{\mu\nu}$-символом. Фактически, для потребностей теории возмущений достаточно задать определение $\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma}$.

Ввиду того, что *a priori* нет каких-либо оснований предпочесть одно предписание для ϵ-символов другому, естественно использовать наиболее общее предписание

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} = C(d) [\delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho} - \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma}] , \tag{7}$$

где функция $C(d)$ допускает разложение в ряд по ϵ ($d \equiv 2 - 2\epsilon$)

$$C(d) = 1 + C_1(2\epsilon) + C_2 (2\epsilon)^2 + \ldots \tag{8}$$

с, вообще говоря, произвольными константами $C_1, C_2, \ldots$ δ-символ в (7) по определению является d-мерным, в отличие от двумерного символа $\bar{\delta}^{\mu\nu}$. Например, регуляризация Хуфта – Вельтмана [5], в которой ϵ-символы рассматриваются в качестве существенно двумерных объектов с

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} = [\bar{\delta}^{\mu\sigma} \bar{\delta}^{\nu\rho} - \bar{\delta}^{\mu\rho} \bar{\delta}^{\nu\sigma}] , \tag{9}$$

соответствует

$$C(d) = 4/d^2 = 1/(1-\epsilon)^2 , \tag{10}$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 3/4 .$$

β-функция σ-модели (3) определяется согласно

$$\beta_{ab} = \mu \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1}{\lambda^2(\mu)} g_{ab} \right] , \tag{11}$$

где μ – масштабный параметр ренормгруппы, и связана с контрчленами посредством соотношения [6]

$$\beta_{ab} = T_{ab}^{(1,1)} = 2\lambda^2 T_{ab}^{(1,2)} + 3\lambda^4 T_{ab}^{(1,3)} . \tag{12}$$

Для WZW-модели (2) – (4) β_{ab} можно представить в виде [6]

$$\beta_{ab} = - \frac{\delta_{ab}}{\lambda^4(\mu)} \mu \frac{d}{d\mu} \lambda^2(\mu) \equiv - \frac{\delta_{ab}}{\lambda^4} \beta_\lambda , \tag{13}$$

где

$$\beta_\lambda = \mu \frac{d}{d\mu} \lambda^2(\mu) . \tag{14}$$

WZW-член не перенормируется в соответствии с его топологической природой.

Двухпетлевая β-функция WZW-модели по теории возмущений вычислена в работе [6]

$$\beta_\lambda = - \frac{\lambda^4 Q}{2\pi}(1-\eta^2) - \frac{\lambda^6 Q^2}{2(2\pi)^2}(1-\eta^2)(1-\eta^2-2C_1\eta^2) , \tag{15}$$

где Q – собственное значение квадратичного оператора Казимира в присоединенном представлении

$$f_{ijk} f_{njk} = Q\delta_{in} . \tag{16}$$

Результат (15) согласуется с фактом конечности теории в критической точке при $\eta^2 = 1$ [1]. β_λ в (15) следует также сравнить с непертурбативным результатом [4] для производной β_λ в критической точке.

$$\left. \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda^2} \right|_{\eta^2=1} = \frac{2Q}{n} \left[\frac{1}{1+Q/n} \right] = \frac{2Q}{n} - \frac{2Q^2}{n^2} + \frac{2Q^3}{n^3} + O\left(\frac{Q^4}{n^4}\right) , \tag{17}$$

который с точностью до двух петель согласуется с (15), если использовать $C_1 = 1$ (регуляризация Хуфта – Вельтмана) [6, 7].

Анализ УФ-расходимостей трехпетлевых диаграмм согласно методу фонового поля для нелинейных σ-моделей с кручением [3, 6] путем прямого (весьма трудоемкого и сложного) вычисления соответствующих контрчленов с учетом необходимых вычитаний одно- и двухпетлевых подрасходимостей дает следующий результат для трехпетлевого вклада в β- функцию в (15)

$$\beta_\lambda^{(3-loop)} = - \frac{Q^3\lambda^8}{(4\pi)^3} (1-\eta^2)[q_0 + (1-\eta^2)q_2 + (1-\eta^4)q_4] , \tag{18}$$

где численные значения коэффициентов q_0, q_2 и q_4 оказываются следующими

$$q_0 = 22 - 4C_1 - 8C_2 - 4C_1^2 , \tag{19}$$

$$q_2 = \frac{1}{2^3 \cdot 3^4} [- 15545 + 4038 C_1 + 2212 C_2] ,$$

$$q_4 = \frac{1}{2^3 \cdot 3^4} [- 1053 - 1446 C_1 - 1564 C_2 + 2592 C_1^2] .$$

Формулы (18) и (19) представляют основной результат. Детали вычислений будут опубликованы.

Трехпетлевой вклад (18) также равен нулю в критической точке. Замечательно, что для регуляризации Хуфта – Вельтмана $q_0 = 8$, что в точности согласуется с непертурбативным результатом (17) с точностью до трех петель! При этом численные значения q_2 и q_4 оказываются следующими

$$q_2 = - \frac{1231}{81} , \qquad q_4 = - \frac{135}{81} = - \frac{5}{3} . \tag{20}$$

Автор признателен И.Л.Бухбиндеру, А.А.Дериглазову и А.А.Цейтлину за полезные обсуждения.

Литература

1. *Witten E.* Comm. Math. Phys., 1984, **92**, 455.
2. *Polyakov A.M., Wiegmann P.B.* Phys. Lett., 1983, **131B**, 121; 1984, **141B**, 223.
3. *Braaten E., Curtright Th.L., Zachos C.K.* Nucl. Phys., 1985, **B260**, 630.
4. *Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B.* Nucl. Phys., 1984, **B247**, 83.
5. *t'Hooft G., Veltman M.* Nucl. Phys., 1972, **B44**, 189.
6. *Ketov S.V.* Nucl. Phys., 1987, **B294**, 813.
7. *Bos M.* MIT Preprint CTP 1439. Cambridge, MA., USA, 1986.

Институт сильноточной электроники
Сибирское отделение Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1 февраля 1988 г.