Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 6, стр. 286 – 288 *25 марта 1988 г.*

СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТОГО РОЖДЕНИЯ И КВАДРАТИЧНОЙ ГИБЕЛИ ГЛЮОНОВ

А.В.Батунин

Показано, что учет слипания глюонов в каскаде приводит к переходу от отрицательного биномиального распределения по множественности к пуассоновскому при высоких энергиях.

При высоких энергиях в адрон-адронных столкновениях число партонов становится столь велико, что их нельзя рассматривать как невзаимодействующие. Наряду с процессом каскадного рождения партонов нужно учитывать и обратный процесс – их рекомбинацию, слипание нескольких в один. Согласно [1] в КХД можно ввести параметр "перекрытия" партонов (глюонов, кварков):

$$W(x, Q^2) = \alpha_s(Q^2)\, x\, F(x, Q^2) / (Q^2 R_h^2), \tag{1}$$

где $\alpha_s(Q^2)$ – константа сильного взаимодействия, Q^2 – квадрат переданного импульса, $F(x, Q^2)$ – плотность вероятности числа партонов с долей импульса адрона x при данном Q^2.

R_h – радиус адрона. Вероятность обратной рекомбинации партонов, таким образом, пропорциональна числу партонов и становится заметной при $xF(x, Q^2)/(Q^2R_h^2) \approx 1$.

Исследуем развитие чисто глюонного каскада с учетом рекомбинации, ограничиваясь для простоты только трехглюонными вершинами $g \to gg$ и $gg \to g$. Запишем уравнение Колмогорова – Чепмена [2] для вероятности $P_n(t)$ обнаружить n глюонов при данном значении параметра эволюции системы t:

$$dP_n(t)/dt = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) - \mu_n P_n(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t), \tag{2}$$

где λ_n (μ_n) – вероятность перехода системы с числом глюонов n в систему с $n+1$ ($n-1$) глюонами. Полагая рождение глюонов независимым в каждом акте деления $g \to gg$, получаем вероятность рождения k новых глюонов из n присутствующих при изменении параметра эволюции на δt:

$$\lambda_n \delta t = C_n^k (\lambda\delta t)^k (1 - \lambda\delta t)^{n-k},$$

где λ – константа в вершине $g \to gg$, не зависящая от n. Очевидно, что при $\lambda\delta t \ll 1$ доминирует член с $k = 1$ и мы имеем $\lambda_n = n\lambda$, так называемое простое рождение. Вероятность слипания двух глюонов в один также из комбинаторных соображений пропорциональна $C_n^2 = n(n-1)/2$, так что $\mu_n = \mu n(n-1)$, где μ – константа в вершине $gg \to g$. (В общем случае $\mu \ll \lambda$ из-за различия фазовых объемов процессов деления и слипания). Заметим, что $\mu_n/\lambda_n \sim n$, что согласуется с КХД-оценкой (1). Тогда уравнение (2) запишется в виде:

$$dP_n(t)/dt = -\lambda n P_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1}(t) - \mu(n-1)nP_n(t) + \mu n(n+1)P_{n+1}(t) \tag{3}$$

– типичный марковский процесс простого рождения и квадратичной гибели. Переходя к производящей функции $G(z, t) = \sum\limits_n P_n(t)z^n$ и вводя новые переменные $\tau = \lambda t$ и $\alpha = \mu/\lambda$, получаем дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка:

$$G_\tau(z, \tau) = z(z-1)(G_z(z, \tau) - \alpha G_{zz}(z, \tau)) \tag{4}$$

с граничным условием $G(1, \tau) = 1$ (сохранение полной вероятности) и начальным условием $G(z, 0) = z^m$ (m начальных глюонов). Легко видеть, что (4) имеет стационарное решение $G(z) = \exp((z-1)/\alpha)$ удовлетворяющее нашему граничному условию и являющееся хорошо известным распределением Пуассона (РП):

$$P_n = \langle n \rangle^n / n! \exp(-\langle n \rangle), \qquad \langle n \rangle = D = 1/\alpha, \tag{5}$$

где $\langle n \rangle$ – среднее число глюонов, $D = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ – дисперсия распределения. Заметим, что стационарное решение можно непосредственно получить из уравнения (3). Полагая л. ч. = = 0 и расписывая (3) последовательно для каждого значения $n = 0, 1, 2 \ldots$, получаем:

$$P_n = P_1 (\lambda/\mu)^{n-1}/n!,$$

что с условием $\sum\limits_n P_n = 1$ и приводит к распределению (5).

Разложение общего решения уравнения (4) в ряд по параметру $l = 1/\tau$ дает также пуассоновское распределение по множественности. Имеем вместо (4):

$$l^2 G_l(z, l) = -z(z-1)(G_z(z, l) - \alpha G_{zz}(z, l)). \tag{6}$$

Ищем $G(z, l)$ в виде ряда $G(z, l) = \sum\limits_n \sigma_n(z) l^n / n!$ и для первых членов разложения получаем:

$$\sigma_0(z) = a\alpha \exp(z/\alpha) + b, \qquad \sigma_1(z) = c\alpha \exp(z/\alpha) + d$$

(a, b, c, d – произвольные константы). Таким образом, при $l \to 0$ ($t \to \infty$) система асимптотически стремится к стационарному РП (что можно показать и более строго). Это резко отличается от отрицательного биномиального распределения (ОБР), к которому приводит одно только простое рождение глюонов $g \to gg$ ($\alpha = 0$ в (4)) [3]:

$$G(z, \tau) = z^m / (z - (z-1)\exp(\tau))^m ,$$

$$\langle n \rangle = m \exp(\tau), \qquad D = \langle n^2 \rangle / m - \langle n \rangle$$

и которое успешно описывает экспериментальные данные по распределению по множественности заряженных частиц в адрон-адронных взаимодействиях при современных энергиях $\sqrt{s} = 20 - 900$ ГэВ [4].

Следовательно, индикатором на вступление в игру рекомбинации глюонов будет служить сужение распределения по множественности наблюдаемых частиц (т. е. глюонов, достигших массы адронизации Q_0) при высоких энергиях: переход от ОБР с большой дисперсией $D \sim \langle n \rangle^2$ к узкому РП с дисперсией $D \sim \langle n \rangle$, причем $\langle n \rangle$ установившегося стационарного распределения будет равно $1/\alpha$ – отношению вероятностей простого рождения и квадратичной гибели глюонов.

Исследование нестационарного решения уравнения (4) и случая с зависящими от t величинами λ и μ будет дано в дальнейших работах.

Автор благодарен В.В.Бажанову, О.Л.Зорину, А.К.Лиходеду и Ю.Г.Строганову за многочисленные конструктивные обсуждения.

Литература

1. *Gribov L. V., Levin E.M., Ryskin M.G.* Phys. Rep., 1983, **100**, 1.
2. *Уиттл П.* Вероятность. М.: Наука: 1982; *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
3. *Durand B., Sarcevic I.* Phys. Lett., 1986, **172 B**, 104.
4. *Sarcevic I.* Mod. Phys. Lett., 1987, **A2**, 513.

Поступила в редакцию
4 февраля 1988 г.

Институт физики высоких энергий