Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 6, стр. 292 – 294 *25 марта 1988 г.*

ЗЕЕМАН-ЭФФЕКТ В СИСТЕМЕ ЗАРЯД – МОНОПОЛЬ

А.Г.Савинков, И.С.Шапиро

Показано, что Зееман-эффект в слабом поле в системе, включающей бесспиновую заряженную частицу и монополь, существенно отличается от расщепления уровней частицы со спином. Это противоречит отождествлению такой системы с фермионом.

В последнее время в литературе интенсивно обсуждается вопрос о возможности конструирования фермиона из бозонов для топологически нетривиальных объектов в теории поля. В качестве возможных примеров в работах, цитируемых ниже, рассматривались составные системы, включающие в себя бесспиновые частицы, монополи Дирака и т'Хофта – Полякова. В настоящей статье показывается, что отождествление таких систем с фермионами неправомерно.

Бесспиновая заряженная частица в поле монополя Дирака обладает динамическим интегралом движения. Он наиболее просто выглядит в глобальном пространстве расслоения Кустанхеймо – Штифеля $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ с базой $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ и слоем $U(1)$, на которое можно перенести динамику частицы [1]. Указанному интегралу отвечают генераторы группы $SU(2)$

$$J_i = \frac{1}{2}\,(\bar z \sigma_i \bar\partial - \partial \sigma_i z), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$, $\bar z \sigma_i z = x_i \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$. Угловая часть волновой функции представляет собой элемент матрицы поворотов $D^j_{-(n/2)m}(\xi)$, $\xi \in S^3$ [2], где $n = 2eg$ – целое число, e – заряд частицы, g – заряд монополя; $m = -j, -j+1, \ldots, j$; $j = n/2,\ n/2+1, (n/2)+2, \ldots$ (считаем $n > 0$).

В ряде работ (см. [3, 4, 5] и ссылки там), содержится утверждение, что за счет взаимодействия частицы с монополем Дирака в системе генерируется спин $n/2$, а добавление чисел $1, 2, \ldots$ отвечает орбитальным возбуждениям. В частности, если n – нечетное, то из двух бозонов – бесспиновой частицы и бесспинового монополя Дирака образуется фермион.

В этой связи интересно проверить, как ведет себя такая система в слабом однородном магнитном поле. С учетом линейных по полю $\mathbf{H}$ членов гамильтониан $\mathcal{H}$ в глобальном пространстве расслоения имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Delta\mathcal{H} = -\frac{1}{2M}\left(\frac{1}{\bar z z}\,\partial\bar\partial + \frac{v^2}{4(\bar z z)^2}\right) + V - \frac{eH_i}{2M}\left(\frac{\bar z \sigma_i z}{\bar z z}\,\frac{v}{2} + J_i\right), \quad v = z\partial - \bar z \bar\partial\,, \tag{2}$$

где V – локализующий заряженную частицу потенциал, положение монополя считаем фиксированным. Например, для диона $V = -\alpha/\bar z z$ и уровни энергии дискретного спектра невозмущенного гамильтониана $\mathcal{H}_0$ невырождены по j.

Очевидно тогда, что расщепление уровней дается матричными элементами

$$\Delta E = -\frac{eH}{2M} < njm \,|\, J_3 + \frac{\bar z \sigma_3 z}{\bar z z}\,\frac{v}{2} \,|\, njm >, \tag{3}$$

где $|\,njm> = R_j^{(n)}(\bar z z)\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\,D^j_{-(n/2)m}(\xi)$, $v\,|\,njm> = n\,|\,njm>$, $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_3$. Интеграл в (3) берется по глобальному пространству расслоения с элементом объема $dV = (\bar z z/\pi)\,dz^1\,dz^2\,d\bar z^1\,d\bar z^2$.

После интегрирования по трехмерной сфере произведения трех D-функций

$$D^{*j}_{-(n/2)m}\,D^j_{-(n/2)m}\,D^1_{00}\,,$$

где $D^1_{00} = (\bar{z}\sigma_3 z/\bar{z}z)$, получаем

$$\Delta E = -\frac{eHm}{2T}\left(1 - \frac{n^2}{4j(j+1)}\right). \qquad (4)$$

Рассмотрим наинизшее орбитальное состояние с $j = n/2$. Если бы мы имели дело с истинным спином, то для магнитных подуровней была бы справедлива известная формула

$$\Delta E = -\frac{e}{2M}\, 2mH, \qquad -\frac{n}{2} \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}. \qquad (5)$$

В действительности же, как видно из (4), мы имеем

$$\Delta E = -\frac{e}{2M}\, m\, H\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{-1} \qquad (6)$$

Различие (5) и (6) вполне понятно, если учесть, что операторы динамической симметрии J_i при переходе на базу $R^3 \setminus 0$ не имеют отношения к генераторам поворота при вращениях системы координат. Это обстоятельство проявляется, в частности и в изменении фазы волновой функции за счет пребывания системы в магнитном поле: за период, отвечающий ларморовской прецессии спина с частотой μH, волновая функция рассматриваемой системы приобретает фазовый множитель $\exp\{2\pi i n/2n + 3\}$, тогда как в случае истинного спина $n/2$, этот множитель будет равен $(-1)^n$. Из сказанного ясно, что генераторы (1) группы динамической симметрии не могут быть непосредственно интерпретированы как операторы спина.

То же самое можно сказать о системе из монополя т'Хофта – Полякова, взаимодействующего со скалярным изодублетом. В большой серии работ, начиная с [6, 7] утверждается, что хотя все исходные поля бозонные, в системе возникает полуцелый спин за счет существования интеграла

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{T}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{L} = [\,\mathbf{r} \times \mathbf{p}\,]$ и $\mathbf{T} = \vec{\sigma}/2$ – оператор изоспина. В этом случае, поскольку расслоение тривиально, удобно вести рассмотрение в обычном пространстве.

В слабом однородном магнитном поле к гамильтониану

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2M}[p_j - \kappa A^a_j T_a]^2 + V,$$

где $\kappa A^a_j = \epsilon_{ajk}\left[(1 - h(r))/r^2\right] x_k$ – потенциал монополя т'Хофта – Полякова, добавляются члены

$$\Delta\mathcal{H} = -\frac{eH}{2M}\left\{\left(T_z + \frac{1}{2}\right)L_z + \frac{1}{2}(1 - h(r))\left[\left(T_z + \frac{1}{2}\right)\sin^2\theta - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\cos\theta\,(T_+(n_x - in_y) + T_-(n_x + in_y))\right]\right\}, \qquad \mathbf{n} = \mathbf{r}/r, \qquad (8)$$

которые определяют расщепление уровня

$$\Delta E = -\frac{eH}{2M}\,\frac{l \pm m + {}^1/2}{2l + 1}\left(m - \frac{1}{2} + \frac{(1 - \overline{h(r)})}{4\left(l - \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{3}{2}\right)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\left(l - \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{3}{2}\right) + m^2 - m\left(l \mp m - \frac{1}{2}\right)\right]\right), \qquad j = l \pm \frac{1}{2}. \qquad (9)$$

Здесь возникает $\overline{h(r)}$ – среднее по радиальным функциям $R_{jl}(r)$. Таким образом и в данной системе Зееман-эффект аномален в сколь угодно слабом поле и генераторы группы динамической симметрии (7) не имеют никакого отношения к операторам спина, определяющим преобразование волновых функций системы при вращениях.

Подчеркнем, что именно трансформационные свойства волновых полей относительно преобразований систем отсчета определяют знакоопределенность энергии и, вследствие этого, квантовую статистику отвечающих полям частиц.

Литература

1. *Соловьев М.А.* Письма в ЖЭТФ, 1984, **39**, 581; *Савинков А.Г.* Письма в ЖЭТФ, 1988, **47**, 13.
2. *Wu T.T., Yang C.N.* Phys. Rev., 1975, **D12**, 3845.
3. *Goldhaber A.S.* Phys. Rev. Lett., 1976, **36**, 1122.
4. *Коулмен С.* УФН, 1984, **144**, 277; *Раджамаран Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
5. *Balachandran A.P., Gomm H., Sorkin R.D.* Nucl. Phys., 1987, **B281**, 573.
6. *Hasenfratz P., 't Hooft G.* Phys. Rev. Lett., 1976, **36**, 1119.
7. *Jackiw R., Rebbi G.* Phys. Rev. Lett., 1976, **36**, 1116.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11 февраля 1988 г.