

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ

А.Г.Храпак

В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости показано, что энергетический спектр пузырьков квантован. Определена функция распределения пузырьков по импульсам. В жидком He^4 спектр пузырьков совпадает с "многофонной" ветвью элементарных возбуждений.

Рассмотрим пузырек в идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ , обладающей поверхностным натяжением σ и находящейся на линии насыщения вдали от критической точки, где плотность пара мала по сравнению с плотностью жидкости. Колебательное движение жидкости квантовано и наименьшим квантом обладает сферически симметричное движение стенок пузырька. Поэтому при достаточно низких температурах можно ограничиться учетом лишь одной колебательной степени свободы, соответствующей радиальному движению. Вращательное движение также квантовано, причем нулевому кванту соответствует отсутствие вращения и, ограничиваясь низкими температурами, мы не будем его учитывать. Движение жидкости вследствие трансляционного перемещения пузырька и колебания его стенок потенциально, и полная энергия жидкости, содержащей пузырек радиуса R , равна ¹

$$E = \int (\rho v^2 / 2) d^3 r + 4\pi\sigma R^2 = E_T + E_R, \quad (1)$$

$$E_T = 3P_T^2 / 4\pi\rho R^3, \quad E_R = P_R^2 / 8\pi\rho R^3 + 4\pi\sigma R^2,$$

где $v(\mathbf{r})$ – скорость жидкости, E_T , E_R и P_T , P_R – энергия и импульс поступательного и радиального движений ($P_R = 4\pi\rho R^3 \dot{R}$).

Поступательное движение пузырька классично, а радиальное квантовано. Закон дисперсии можно определить с помощью условий квантования Бора – Зоммерфельда, $\oint P_R dR = 2\pi\hbar(n + 1/2)$. Используя (1), получаем уравнение для определения $E_n(P_T)$

$$\tilde{E}_n(\tilde{P}_T) = F(\tilde{P}_T^2 / \tilde{E}_n^{5/2}), \quad (2)$$

где $\tilde{E}_n(x) = E_n(x) / E(0)$, $\tilde{P}_T = P_T / P_n$, а

$$E_n(0) = \frac{2^{4/7} \pi \hbar^{4/7} \sigma^{5/7} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{4/7}}{I^{4/7}(0) \rho^{2/7}}, \quad P_n^2 = \frac{\rho E_n^{5/2}(0)}{6\pi^{1/2} \sigma^{3/2}}. \quad (3)$$

Функция $F(y) = [I(0) / I(y)]^{4/7}$ определяется выражениями

$$I(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} (x^3 - x^5 - y)^{1/2} dx, \quad I(0) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4)}{21\Gamma(3/4)} \approx 0,25, \quad (4)$$

где $x_{1,2}$ – положительные нули подинтегрального выражения ($x_1 \leq x_2$). Близкий к (3) спектр для случая $P_T = 0$ был получен в ² для энергии квантовых зародышей. При заданном n минимальной энергией $E_n(0)$ обладают покоящиеся пузырьки с $P_T = 0$. Для реальных жидкостей эта энергия сравнима с теплотой испарения атома. Так, например, в He^4 при $T = 1,1$ К $E_0(0) \approx 15,5$ К, а при $T = 4,2$ К $E_0(0) \approx 6,5$ К. В тройной точке воды $E_0(0) \approx 410$ К.

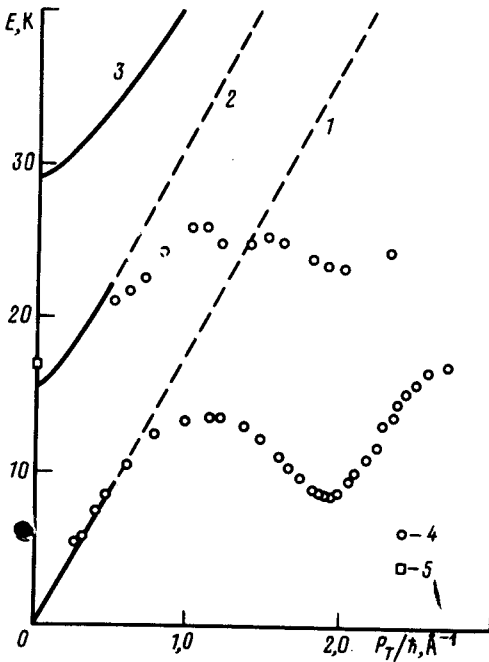
Во всей области допустимых значений y функция $I(y)$ с ошибкой не превышающей 2% аппроксимируется выражением

$$I(y) \approx I(0) [1 - (y/y_0)^{3/4}], \quad y_0 = 2 \cdot 3^{3/2} / 5^{5/2} \approx 0,19. \quad (5)$$

Это позволяет получить связь между P_T и E_n

$$\tilde{P}_T^2 \approx y_0 \tilde{E}_n^{5/2} [1 - \tilde{E}_n^{-7/4}]^{4/3}. \quad (6)$$

При малых импульсах $\tilde{E}_n \approx 1 + P_T^{3/2} + \dots$. Причина неквадратичной зависимости E_n от P_T связана с осцилляциями присоединенной массы пузырька ($M_b \sim R^3(t)$) и его скорости.



Энергетический спектр одночастичных возбуждений в жидком He^4 при $T = 1,1 \text{ К}$. Идеальные газы фононов — 1 и пузырьков в основном состоянии — 2 и первом возбужденном — 3. Точки — эксперимент 3 — 4 и 4 — 5

На рисунке показана зависимость (6) в He^4 при $T = 1,1 \text{ К}$ для первых двух мод. Там же приведен закон дисперсии идеального фононного газа ($E = cP_T$, c — скорость звука) и результаты, полученные в экспериментах по неупругому рассеянию нейтронов ³ и рамановскому рассеянию света ⁴. На наш взгляд, высокочастотная ветвь $E(P_T)$, обычно называемая "многофонной" ⁵, определяет спектр пузырьков: Отличие пунктирной части кривой 2 от эксперимента связано с тем, что мы не учитывали процессы взаимодействия между квазичастицами, роль которых возрастает с ростом скорости. Возможность исчезновения пузырьков с испусканием двух или более фононов ограничивает их время жизни. Это, по-видимому, является одной из причин заметного уширения "многофонной" ветви спектра, наблюдаемого в эксперименте ^{3, 5}.

Максимальный размер покоящегося пузырька $R_n = [E_n(0) / 4\pi\sigma]^{1/2}$ растет с ростом n и при больших n пропорционален $n^{2/7}$. Размер пузырька в основном состоянии близок к межатомному расстоянию в жидкости (в He^4 при $T = 1,1 \text{ К}$ $R_0 \approx 2,2 \text{ Å}$) и полученному нами в рамках гидродинамической модели неплохому согласию с экспериментом в области малых P_T не следует придавать слишком большого значения. Пузырьки в основном состоянии скорее похожи на вакансии в кристаллах.

Пузырьки являются одним из типов коллективных возбуждений в жидкости, и в дальнейшем мы будем называть их баблонами. Как и в случае вакансионных в кристаллах ⁶, статисти-

ка баблонов определяется числом атомов, которые необходимо уничтожить при их образовании и спином атомов. Так как обычно $E_n > E_n(0) \gg T$, то в приближении неидеального газа равновесное распределение баблонов дается формулой Больцмана с нулевым химическим потенциалом

$$n(P_T) = \sum_n \exp(-E_n(P_T)/T). \quad (7)$$

Концентрацию баблонов можно оценить интегрируя (7) по импульсам, с учетом того, что основной вклад дают малые P_T

$$N \approx A \frac{\rho T^2}{\hbar^2 \sigma} \sum_n (n + 1/2) \exp(-E_n(0)/T), \quad (8)$$

где $A \approx 7,1 \cdot 10^{-3}$. Оценка для He^4 при $T = 1,1$ К дает $N \approx 2,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, а при $T = T_\lambda$ $N \approx 2,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

Взаимодействие между баблонами прежде всего связано с их радиальными пульсациями, создающими вокруг баблона поле скоростей, потенциал которого эквивалентен электростатическому потенциалу заряда $Z = 2(\pi\rho)^{1/2} R^2$. Так как $\langle Z \rangle = 0$, то асимптотика парного взаимодействия между баблонами $V(r)$ носит поляризационный характер

$$V(r) = -\alpha/2r^4, \quad \alpha = \langle Z_1 R_2^3 + Z_2 R_1^3 \rangle / 2. \quad (9)$$

Вследствие сил зеркального отображения баблоны отталкиваются от стенок сосуда, что делает менее выгодным их нахождение в пристеночных областях, тонких пленках и капиллярах.

Автор выражает искреннюю признательность Р.Г.Минцу, Л.П.Питаевскому, С.А.Тригеру и И.Т.Якубову за многочисленные дискуссии и полезные замечания.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. Лифшиц И.М., Каган Ю. ЖЭТФ, 1972, 62, 385.
3. Cowley R.A., Woods A.D.B. Can. J. Phys., 1971, 49, 177.
4. Greytak T.J., Woerner R., Yan J., Benjamin R. Phys. Rev. Lett., 1970, 25, 1547.
5. Svensson E.C., Sears V.F. Physica 1986, B137, 126.
6. Андреев А.Ф., Лифшиц И.М. 1969, 56, 2055.