

НОВЫЙ ТИП РЕЗОНАНСОВ В УПРУГОМ РАССЕЯНИИ

Д.И.Абрамов, С.Ю.Овчинников, Е.А.Соловьев

На примере задачи двух кулоновских центров $Z_1 e Z_2$ рассмотрен новый тип квазистационарных состояний, связанных с захватом классической частицы в состояние неустойчивого равновесия.

В работе ¹, при точном численном расчете полюсов S -матрицы задачи двух кулоновских центров $Z_1 e Z_2$ ($e = -1$) .

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_r - \frac{Z_1}{|r - R/2|} - \frac{Z_2}{|r + R/2|} \right] \psi = E \psi, \quad (1)$$

были обнаружены квазистационарные состояния с малой шириной, происхождение которых оставалось неясным, т. к. их не удалось связать с какими-либо особенностями в поведении эффективного квазирадиального потенциала. Как показано, ниже, несмотря на точное разделение переменных в уравнении Шредингера (1), причину возникновения этих узких резонансов нельзя понять в рамках лишь одномерной квазирадиальной задачи и здесь принципиальную роль играет многомерность системы.

Уравнение Шредингера (1) допускает разделение переменных в вытянутых сфероидальных координатах $\xi \in [1, \infty)$, $\eta \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и после подстановки в него волновой функции в виде ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\varphi(\mathbf{r}) = [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{-1/2} U(\xi) V(\eta) e^{im\varphi}$$

приводится к системе уравнений ²

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + \left\{ \frac{m_e}{\hbar^2} \left[c^2 + \frac{a\xi - \lambda}{\xi^2 - 1} \right] + \frac{1 - m^2}{(\xi^2 - 1)^2} \right\} U = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2 V}{d\eta^2} + \left\{ \frac{m_e}{\hbar^2} \left[c^2 + \frac{b\eta + \lambda}{1 - \eta^2} \right] + \frac{1 - m^2}{(1 - \eta^2)^2} \right\} V = 0, \quad (3)$$

где $c^2 = ER^2/2$, $a = (Z_1 + Z_2)R$, $b = (Z_2 - Z_1)R$, λ – константа разделения.

Интересующие нас квазистационарные состояния есть только при малых значениях m^1 , поэтому для их анализа мы используем квазиклассическую асимптотику с $m = O(1)$, т.е. $\hbar m \rightarrow 0$. Сразу отметим, что эффективный потенциал квазирадиального уравнения (2) по форме совпадает с радиальным потенциалом атома водорода, в котором, как известно, квазистационарных состояний нет, откуда уже ясна нестандартность данной ситуации. С другой стороны узким резонансам должны соответствовать в классическом пределе траектории, на которых частица сколь угодно долго находится вблизи рассеивающего центра. То, что в (2) явно не видны такие траектории связано с нетривиальной зависимостью квазирадиальной скорости от импульса p_ξ ³

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{4(\xi^2 - 1)}{m_e R^2 (\xi^2 - \eta^2)} p_\xi, \quad p_\xi = \sqrt{m_e \left(c^2 + \frac{a\xi - \lambda}{(\xi^2 - 1)} \right)}. \quad (4)$$

Возникновение резонансов отражает специфическое поведение скорости вблизи точки $\xi = 1$ при $a = \lambda$. В этом случае сингулярность у импульса p_ξ в точке $\xi = 1$ исчезает и вблизи нее $\xi \sim (\xi - 1)$. В результате этого время логарифмически стремится к бесконечности при $\xi \rightarrow 1$, а траектория частицы асимптотически приближается к межъядерной оси ($\xi = 1$), после бесконечного числа осцилляций по квазиугловой переменной η (см. рис. 1). Такие

траектории, приводящие к захвату частицы в состояние неустойчивого равновесия на межъядерной оси, обсуждались ранее для положительных зарядов ($Z_1 > 0, Z_2 > 0$) в небесной механике ⁴. Для расчета положения и ширины квазистационарных состояний нужно вычислить асимптотику $U(\xi)$ при $\hbar \rightarrow 0$, $(a - \lambda) = O(\hbar)$ и $a \sim \lambda \sim c = O(1)$, учитывающую сингулярность квазирадиального потенциала в точке $\xi = 1$. Соответствующий вариант метода эталонного уравнения практически совпадает с тем, что использовался в ⁵ при анализе высоковольтных состояний задачи $Z_1 e Z_2$, поэтому, опуская технические детали, приведем сразу окончательное выражение

$$U(\xi) = [\rho'(\xi)]^{-1/2} \rho^{(m+1)/2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \kappa \rho\right) \Phi\left(\frac{m+1}{2} + i \frac{a-\lambda}{4\hbar\kappa}, m+1, \frac{i}{\hbar} 2\kappa\rho\right),$$

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\kappa} \int_1^\xi \sqrt{c^2 + \frac{a+\lambda}{2(\xi'+1)}} d\xi', \quad \kappa = \sqrt{c^2 + \frac{a+\lambda}{4}}.$$

С точностью до несущественного множителя $[\rho']^{-1/2}$ эта волновая функция совпадает с водородоподобной волновой функцией по эффективной радиальной переменной ρ , полюса S -матрицы которой расположены, как известно (см., например, ⁶ ф. (141, 10)), там где выполняется соотношение

$$a - \lambda = 2i\hbar\kappa(m + 2q + 1), \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Входящая в (5) константа разделения λ находится из квазиуглового уравнения (3) и, вообще говоря, явно не вычисляется. Однако из анализа результатов численного расчета ¹ видно, что интересующие нас квазистационарные состояния находятся в области применимости для λ разложения объединенного атома ²

$$\lambda = \lambda_0(R) - \frac{1}{4}ER^2, \quad \lambda_0(R) = \hbar^2\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z_1 - Z_2)^2 R^2 / 8\hbar^2\left(l + \frac{1}{2}\right)^2, \quad (6)$$

где l — орбитальное квантовое число объединенного атома ($R = 0$). Подставляя (6) в (5) получаем квадратное уравнение относительно E , откуда комплексное значение энергии квазистационарного состояния равно

$$E_{qim}(R) = 4R^{-2} \{ \lambda_0(R) - (Z_1 + Z_2)R \pm i\hbar(m + 2q + 1)\sqrt{8\lambda_0(R) - 6(Z_1 + Z_2)R} \}, \quad (7)$$

На рис. 2 приведены для сравнения точные положения полюсов S -матрицы в плоскости $k = \sqrt{2E}$ и вычисленные по формуле (7). Если в уравнении (5) использовать более точные квазиклассические значения λ , то его решение практически сливается с точным расчетом в масштабе рисунка.

В водородоподобной задаче условие (5) приводит к виртуальным состояниям. Превращение их в нашем случае в квазистационарные происходит благодаря зависимости λ от энергии, что отражает многомерность исходной задачи. Действительно, как показывает численный расчет, если в уравнении (2) зафиксировать любое вещественное значение λ (т. е. рассматривать его как изолированную одномерную задачу), то все квазистационарные состояния вновь превращаются в виртуальные. Как видно из (7), при $\hbar \rightarrow 0$ ширина квазистационарных состояний $\Gamma_{qim} = 2\text{Im}E_{qim}$ стремится к нулю линейно по \hbar и в этом пределе им соответствуют траектории с $a = \lambda$ (см. ф. (5)), изображенные на рис. 1. Линейная зависимость ширины от \hbar отличает эти резонансы, как от подбарьерных, ширина которых экспоненциально мала по \hbar , так и от надбарьерных резонансов, имеющих конечную ширину в классическом пределе.

Уже сейчас становится ясно, что квазистационарные состояния, рассмотренного здесь типа, имеют большое значение в различных физических приложениях. Так, например, только с

их помощью удастся объяснить и рассчитать в ряде случаев энергетический спектр свободных электронов, образующихся при медленных атомных столкновениях ¹. Квазистационарные состояния задачи $Z_1 e Z_2$ с $Z_1 < 0, Z_2 < 0$ (рис. 1в и 2в) использовались также для объяснения узкого пика в дифференциальном по энергии сечении рождения позитронов при столкновении сверхтяжелых ядер ⁷. С захватом частицы на неустойчивые периодические траектории, очевидно, связаны квази-ландаусские резонансы ⁸ и резонансы при положительных энергиях в спектре фотоионизации водорода в однородном электрическом поле F ⁹. На последний случай практически без изменений переносится развитая выше техника расчета, т. к. гамильтониан этой задачи можно получить из гамильтониана системы $Z_1 e Z_2$ предельным переходом $R \rightarrow \infty, Z_2 \rightarrow -\infty, \lim Z_2 R^{-2} = F (Z_1 = 1)$. Состоянием неустойчивого равновесия здесь является движение вдоль отрезка прямой направленного из ядра Z_1 против поля F и захват в это состояние иллюстрирует рис. 1 б.

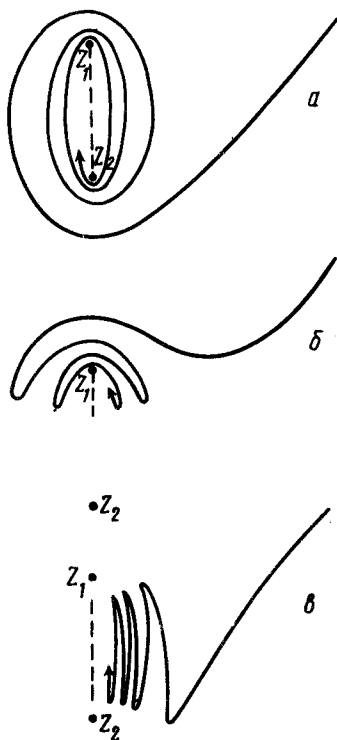


Рис. 1

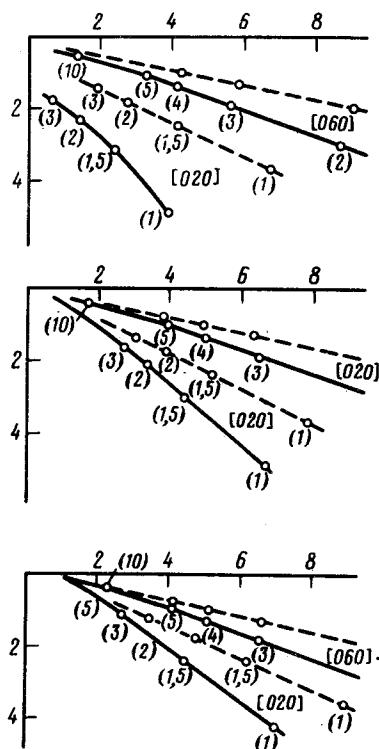


Рис. 2

Рис. 1. Траектории, приводящие к захвату частицы: а — $Z_1 > 0, Z_2 > 0$; б — $Z_1 > 0, Z_2 < 0$; в — $Z_1 < 0, Z_2 < 0$. Пунктиром изображены предельные неустойчивые периодические траектории

Рис. 2. Траектории полюсов S -матрицы в комплексной плоскости волнового числа $k = (2E)^{1/2}$ при изменении межъядерного расстояния R : а — $Z_1 = 1, Z_2 = 1$; б — $Z_1 = 1, Z_2 = -1$; в — $Z_1 = -1, Z_2 = -1$. Сплошные кривые — результат точного численного расчета, пунктир — расчет по формуле (7). В круглых скобках указаны значения R , а в квадратных скобках — квантовые числа состояний $[q, l, m]$

Авторы благодарны С.С.Герштейну и Ю.Н.Демкову за полезные обсуждения, а также В.В.Гусеву за проведение вспомогательных расчетов.

Литература

1. Овчинников С.Ю., Соловьев Е.А. ЖЭТФ, 1986, 91, 477.
2. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика. М.: Наука, 1965.
4. Шарлье К. Небесная механика. М.: Наука, 1966.
5. Соловьев Е.А. ЖЭТФ, 1986, 90, 1165.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
7. Демков Ю.Н., Овчинников С.Ю. Письма в ЖЭТФ, 1987, 46, 14.
8. Garton W.R.S., Tomkins F.S. Astrophys J., 1969, 158, 839.
9. Glab W.L., Ng K., Yao D., Nayfeh M.H. Phys. Rev., 1985, A31, 3677.

Ленинградский государственный университет
им. А.А.Жданова

Поступила в редакцию
31 марта 1988 г.