Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 9, стр. 445 – 447 *10 мая 1988 г.*

ОСЦИЛЛЯЦИИ В ФОТОПОГЛОЩЕНИИ ВБЛИЗИ ПОРОГА ИОНИЗАЦИИ ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Е.Б.Богомольный

Показано, что сечение фотопоглощения атомами в слабых электрических и магнитных полях вблизи порога ионизации содержит осциллирующие вклады, связанные с неустойчивыми периодическими траекториями. Величины этих вкладов выражены через параметры периодических траекторий. Результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

1. Недавние эксперименты по фотовозбуждению лазерным пучком атомов водорода, помещенных в магнитное [1, 2] и электрическое [3, 4] поле, подтвердили данные ранних экспериментов о существовании регулярных осцилляций вблизи (и выше) порога ионизации свободного атома. Хотя в проведенных экспериментах напряженности внешних полей в атомных единицах малы, для переходов в рассматриваемые высоковозбужденные состояния эта малость исчезает, что затрудняет использование приближенных методов и вызывает необходимость прямого численного решения соответствующих уравнений (см. [3, 5, 6] и ссылки в них).

Цель данной заметки – указать, что для процесса поглощения фотона атомами во внешних полях могут быть получены простые квазиклассические формулы, причем роль постоянной Планка играет некоторая степень внешнего поля.

2. Основной результат работы состоит в следующем. Вблизи порога ионизации сечение фотопоглощения представимо в виде: а) для внешнего постоянного магнитного поля

$$\sigma(E) = \sigma_{\text{кул}} + \beta^{1/6}\,\mathrm{Im}\sum_p \sigma_p^{(\text{м})}\exp\left(i\frac{S_p}{\beta^{1/3}}\right); \tag{1}$$

б) для внешнего постоянного электрического поля

$$\sigma(E) = \sigma_{\text{кул}} + \gamma^{1/4}\,\mathrm{Im}\sum_p \sigma_p^{(\text{э})}\exp\left(i\frac{S_p}{\gamma^{1/4}}\right). \tag{2}$$

В этих формулах $\beta = B/(4{,}7\cdot 10^5\ \text{Т})$, $\gamma = F/(5{,}1\cdot 10^9\ \text{В/см})$ – напряженности магнитного и электрического полей, выраженные в атомных единицах (для атома водорода), $\sigma_{\text{кул}}$ – сечение чисто кулоновского фотопоглощения. Суммирование в (1), (2) ведется по всем неустойчивым периодическим траекториям, проходящим через кулоновский центр. S_p – приведенная величина действия вдоль данной траектории. $\sigma_p^{(\text{м})}$ и $\sigma_p^{(\text{э})}$ – амплитуды, выражающиеся через элементы матрицы монодромии рассматриваемой периодической траектории и волновую функцию начального состояния.

3. Обозначим

$$A_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|^{1/2}\int(\psi_{\mathbf{p}}^{(-)}(x))^*\,\mathbf{e}\,\vec{\nabla}\psi_0(x)\,d^3x, \tag{3}$$

где $\psi_{\mathbf{p}}^{(-)}(x)$ – известное решение уравнения Шредингера в кулоновском поле притяжения, которое асимптотически ведет себя как плоская волна (с единичным коэффициентом) плюс сходящаяся сферическая волна (см., например, [7]), $\psi_0(x)$ – волновая функция начального состояния, $\mathbf{e}$ – вектор поляризации падающего фотона. Можно показать, что

$$\sigma_{\text{кул}} = \frac{\alpha}{2\pi\omega}\int|A_{\mathbf{p}}|^2\,do_{\mathbf{p}}, \tag{4}$$

$$\sigma_p^{(\text{м})} = \frac{(8\pi)^{1/2}}{\omega}\,\alpha\,(\sin(\theta_1)\sin(\theta_2))^{1/2}A_{\mathbf{p}_1}^*A_{-\mathbf{p}_2}\ \times$$

$$\times \frac{1}{|M_{12}|^{1/2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\nu + i\frac{\pi}{4}\right), \tag{5}$$

$$\sigma_p^{(э)} = \frac{2\alpha}{\omega} A^*_{\mathbf{p}_0} A_{-\mathbf{p}_0} \frac{1}{|M_{12}|} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\nu\right), \tag{6}$$

где α – постоянная тонкой структуры, ω – частота фотона. Для атома в магнитном поле существует бесконечно много периодических траекторий, каждая из которых выходит из центра с импульсом $\mathbf{p}_1$ под углом θ_1 к оси z (выбранной вдоль направления поля) и возвращается обратно с импульсом $\mathbf{p}_2$ под углом θ_2 (см., например, [1, 2, 5]). Именно эти начальные и конечные углы и импульсы входят в (5).

Для атома в электрическом поле при $E > 0$ существует только одна неустойчивая периодическая траектория, выходящая из центра вдоль оси z против поля и отражающаяся обратно. Соответственно, $\sigma_p^{(э)}$ в (6) зависит только от $\mathbf{p}_0$ – импульса, направленного по оси z. Предэкспоненциальный множитель в (5), (6) выражается через M_{12} – элемент матрицы монодромии линеаризованных уравнений, которая связывает отклонения в плоскости перпендикулярной траектории и их скорости в начальной и конечной точках. Пусть y – отклонение от траектории в параболических координатах: $\mu^2 = r + z$, $\nu^2 = r - z$. Матрицу монодромии, входящую в (5) и (6), будем определять из соотношений

$$\begin{pmatrix} y_f \\ \dot{y}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix} \tag{7}$$

ν в (5), (6) – целое число, связанное с дополнительным набегом фазы вблизи точек, в которых квазиклассическое приближение нарушается

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 + 2m\nu_2 + 2\nu_3, \tag{8}$$

где ν_0 – число сопряженных точек на траектории (в которых $M_{12} = 0$), ν_1 – число точек отражения от границ, ν_2 – число отражений от оси $\rho = 0$, ν_3 – число прохождений траектории через центр, m – азимутальное квантовое число конечного состояния. Для состояний с малыми m S_p и M_{12} можно считать независящими от m.

4. Указанные выражения были получены методом, аналогичным использованному в работах [8, 9] для построения высоковозбужденных волновых функций эргодического биллиарда "стадион". В его основе лежит квазиклассическое представление функции Грина уравнения Шредингера во внешнем поле в виде суммы по всем классическим траекториям, соединяющих две фиксированные точки (см., например, [10]). В данной задаче кулоновская особенность несколько модифицирует стандартные выражения, что приводит к появлению кулоновских функций $\psi_{\mathbf{p}}^{(-)}$ в (5), (6).

5. Приведем несколько примеров использования полученных формул. Для атома водорода в электрическом поле сечение поглощения фотона с поляризацией параллельной полю из начального состояния с параболическими квантовыми числами $n_1 = 1, n_2 = 0, m = 0$ имеет вид

$$\sigma(E) = \sigma_{кул}\left(1 + g\gamma^{1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda T n)} \sin\left(\frac{S}{\gamma^{1/4}} n + \pi n\right)\right), \tag{9}$$

где

$$\sigma_{кул} = \frac{43 \cdot 2^{13} \pi^2 e^{-8}}{15} \approx 0{,}568; \quad g = \frac{3 \cdot 5^3}{43} \approx 8{,}72; \quad \lambda^2 = 2e; \quad e = E/\gamma^{1/2};$$

$$S(e) = \oint (4 + 2e\mu^2 - \mu^4)^{1/2} d\mu \approx 4{,}94 + 1{,}69e + 0{,}463e^2$$

$$T(e) = \oint \frac{d\mu}{(4+2e\mu^2-\mu^4)^{1/2}} \approx 1{,}85 + 0{,}21\, e - 0{,}06\, e^2 .$$

Для начального состояния с квантовыми числами $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $m = 0$ осциллирующий член в 25 раз меньше. Эти результаты очень хорошо согласуются с экспериментальными данными [3] и с прямым численным решением уравнения Шредингера [3].

Для атомов в магнитном поле ситуация более сложная. В этом случае существует бесконечно много неустойчивых периодических траекторий и получить замкнутое выражение типа (9) нельзя. Если усреднить сечение по малому интервалу ΔE (что эквивалентно измерению сечения с конечным разрешением), то главный вклад в сумму (1) будет давать небольшое число траекторий, время движения по которым ограничено неравенством [8, 9]:

$$T \leqslant 2\pi\beta^{3/4} / \Delta E . \tag{10}$$

Необходимые параметры таких траекторий нетрудно найти численно. Приведем результат вычисления вклада в сечение поглощения фотона с поляризацией параллельной полю для атома водорода в $2p$-состоянии с $m = 0$, соответствующий простейшей траектории, направленной вдоль оси z:

$$\sigma(E) = \sigma_{\text{кул}} \left(1 + g\beta^{1/6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|M_{12}|^{1/2}} \left(\frac{\operatorname{sh}(\lambda)}{\operatorname{sh}(\lambda n)} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{Sn}{\beta^{1/3}} - \frac{3\pi}{2} n + \frac{\pi}{4} \right) \right) , \tag{11}$$

где

$$\sigma_{\text{кул}} = \frac{69 \cdot 2^{14} \pi^2 e^{-8}}{45} \approx 0{,}607; \quad g = \frac{45\,(2\pi)^{1/2}}{69} \approx 1{,}635; \quad e = E/\beta^{2/3};$$

$$S(e) = 2\oint (2 + 2e\mu^2 - \mu^6)^{1/2} d\mu \approx 5{,}783 + 2{,}094\, e + 3{,}014\, e^2 ;$$

$$|M_{12}(e)| \approx 2{,}82 + 3{,}61\, e + 1{,}25 e^2 ; \quad \lambda^2(e) \approx 1{,}73 + 8{,}5\, e - 0{,}14 e^2 .$$

Нетрудно вычислить вклады нескольких следующих траекторий. Результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [1, 2] и с численным решением уравнения Шредингера [5].

7. В целом, все проведенные вычисления показывают, что формализм неустойчивых периодических траекторий [8, 9] адекватно описывает наблюдаемые осцилляции в фотопоглощении атомами во внешних полях. Использованный метод применим к широкому кругу задач (как интегрируемым, так и неинтегрируемым), в которых существуют неустойчивые периодические траектории, действие вдоль которых велико.

Автор глубоко благодарен Е.А.Соловьеву, обратившего его внимание на обсуждаемый в статье круг вопросов, без дискуссий с которым эта работа была бы невозможна.

Литература

1. *Holle A., Wiebush G., Main J. et al.* Phys. Rev. Lett., 1986, **56**, 2594.
2. *Main J., Wiebush G., Holle A., Welge K.H.* Phys. Rev. Lett., 1986, **57**, 2789.
3. *Rottke H., Welge K.H.* Phys. Rev., 1986, **A33**, 301.
4. *Ng K., Yao D., Nayfeh M.N.* Phys. Rev., 1987, **A33**, 2508.
5. *Wintgen D., Friedrich H.* Phys. Rev., 1987, **A36**, 131.
6. *Вайнберг В.М., Мур В.Д., Попов В.С., Сергеев А.В.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **46**, 178.
7. *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: ГИФМЛ, 1960.
8. *Богомольный Е.Б.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **44**, 436.
9. *Bogomolny E.B.* Landau Institute Preprint, Chernogolovka, 1987-21.
10. *Gutzwiller M.C.* J. Math. Phys., 1971, **12**, 343.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
31 марта 1988 г.