Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 10, стр. 481 – 484 25 мая 1988 г.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОПАГАТОРА ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНЕМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ КАК СУММЫ ПО ПУТЯМ

А.В.Маршаков, В.Я.Файнберг

Исходя из локально-суперсимметричного обобщения действия дираковской частицы во внешнем гравитационном поле, получено представление для функции Грина уравнения Дирака в искривленном пространстве в виде суммы по путям.

Целью предлагаемой статьи является обоснование представлений для функции Грина дираковской частицы в гравитационном поле, удовлетворяющей уравнению первого порядка. История вопроса о представлении пропагатора частицы в искривленном пространстве в виде интеграла по путям насчитывает много лет и берет свое начало с работ Де Витта [2]. Ссылки на последующие реботы можно найти, например, в [3]. Будем исходить из предложенного в [1] действия дираковской частицы во внешнем гравитационном поле; его легко записать в репараметризационно-инвариантном и локально-суперсимметричном виде.

$$S = \int_0^1 d\tau \, \frac{1}{2} \{ g_{\mu\nu}(x(\tau))[e^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - i \psi^\mu \dot{\psi}^\nu - i e^{-1} \chi \dot{x}^\mu \psi^\nu] - i \Gamma_{\mu,\nu\lambda}(x(\tau)) \psi^\mu \psi^\nu \dot{x}^\lambda \} ;$$

$$\mu, \nu, \lambda = 0, 1, \ldots, D-1 \quad \dot{x}^\mu = dx^\mu / d\tau, \; \Gamma_{\mu,\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}\right), \tag{1}$$

$$\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$$

ψ^μ и χ – грассмановы переменные.

Инвариантность (1) относительно репараметризаций очевидна, инвариантность относительно локальной суперсимметрии доказана в [6]. Континуальное представление для дираковской частицы, исходя из действия (1), имеет следующий вид:

$$\int De \int D\chi \int_{x(0)=x_0}^{x(1)=x_1} D_g x \int D_g \psi \, e^{-S(x^\mu, \psi^\mu; g_{\mu\nu})} \tag{2}$$

где S – действие, определенное формулой (1) (в евклидовой формулировке).

Мера интегрирования по переменным $x^\mu(t)$ в искривленном пространстве времени зависит от внешней метрики $g_{\mu\nu}(x)$ следующим образом [7]: ($g = \det g_{\mu\nu}$)

$$D_g x \sim [g(x_0) g(x_1)]^{-1/4} \, [\prod_t \sqrt{g(x(t))}\,] Dx, \tag{3}$$

© Издательство "Наука", Письма в ЖЭТФ, 1988 г.

Где Dx – мера интегрирования в плоском пространстве. При определении континуального интеграла по грассмановым переменным в искривленном пространстве необходимо положить:

$$D_g \psi \sim \left[\prod_t \frac{1}{\sqrt{g(x(t))}} \right] D\psi , \qquad (4)$$

где $D\psi$ – мера интегрирования в плоском пространстве. Определение (4) является следствием правил интегрирования по антикоммутирующим переменным:

$$\int d\psi_\mu \psi^\nu = \delta^\nu_\mu$$

согласно которым дифференциал $d\psi_\mu$ имеет "нижний индекс".

Несмотря на то, что действие (1) зависит лишь от внешней метрики $g_{\mu\nu}(x)$, функция Грина, определенная в (2) будет зависеть от полей репера $V_{a\mu}(x)$. Зависимость от репера должна была бы проявиться при определении граничных условий на поля $\psi^\mu(t)$, если мы потребуем $\psi^\mu \sim \gamma^\mu$, а в определение матриц γ^μ в кривом пространстве обязательно входит репер: $\gamma^\mu = V^\mu_a(x)\gamma^a$. В силу указанных обстоятельств определение граничных условий на поля $\psi^\mu(t)$ непосредственно в (2) затруднено. Поэтому, сделаем в (2) замену переменных:

$$\psi^\mu = V^\mu_a \psi^a, \qquad g_{\mu\nu}(x) = V_{a\mu}(x) V^a_\nu(x),$$

тогда действие (1) перейдет в:

$$S = \int_0^1 d\tau \frac{1}{2} \{ g_{\mu\nu} e^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - i\psi_a \dot{\psi}^a - i(V_{a\nu} \partial_\lambda V^\nu_b + \\ + \Gamma_{\mu,\nu\lambda} V^\mu_a V^\nu_b) \psi^a \psi^b \dot{x}^\lambda - ie^{-1} \chi \dot{x}^\mu V_{a\mu} \psi^a \} \qquad (5)$$

и пропагатор будет определен следующим образом:

$$\hat{G}(1,0 \mid V) = \int De\, D\chi\, D_g x\, D\psi\, e^{-S(x^\mu, \psi_a; V_{a\mu})} \qquad (6)$$

$$x(0) = x_0, \qquad x(1) = x_1; \qquad \psi_a(t) = \gamma_a + \phi_a(t),$$

где $D_g x$ определено в (3), а $D\psi$ – мера интегрирования по полям $\psi_a(t)$ и граничные условия, которым удовлетворяют переменные $\psi_a(t)$, определены как в плоском пространстве [5]. Граничные условия на переменные $x^\mu(t)$ выбираются обычными для определения пропагатора: фиксированные значения на концах пути.

Для обоснования представления (6) вычислим следующее выражение:

$$\hat{j}_{a\mu}(1,0 \mid x) = \frac{\delta \hat{G}(1,0 \mid V)}{\delta V_{a\mu}(x)} \Bigg|_{V_{a\mu}(x) = \delta_{a\mu}} . \qquad (7)$$

При вариации (7) выражения (6) необходимо учитывать зависимость от реперов не только действия (5), но и выражения для меры интегрирования (3), которое можно переписать следующим образом:

$$D_g x \sim [g(x_0) g(x_1)]^{-1/4}\, e^{(1/2)\delta(0) \int dt \log g(x(t))}\, Dx .$$

Для одномерной метрики $e(t)$ и гравитино $\chi(t)$ выберем обычную калибровку:

$$e(t) = T, \qquad \chi(t) = X$$

Тогда проинтегрировав по X, для выражения (7) будем иметь:

$$\hat{j}_{a\mu}(1,0\,|\,x) = \int_0^\infty dT \int_0^1 d\tau \Big\langle \Big\{ \frac{(x_1 - x_0)_\lambda \langle \psi_\lambda \rangle_\psi}{2T} \Big(\delta_{a\mu}\,\delta(0) - \frac{\dot{x}_a(\tau)\,\dot{x}_\mu(\tau)}{T} \Big) -$$

$$- \frac{1}{4T}\int_0^1 dt\, \dot{x}_\lambda(t)\,[\,\dot{x}_\nu(\tau)\langle \psi_\lambda(t)\,\psi_\mu(\tau)\,\psi_a(\tau)\rangle_\psi + \dot{x}_\mu(\tau)\langle \psi_\lambda(t)\,\psi_a(\tau)\psi_\nu(\tau)\rangle_\psi +$$

$$+ \dot{x}_a(\tau)\langle \psi_\lambda(t)\,\psi_\mu(\tau)\,\psi_\nu(\tau)\rangle_\psi\,]\,\partial_\nu + \frac{\dot{x}_\mu(\tau)\langle \psi_a\rangle_\psi}{2T} \Big\}\,\delta(x - x(\tau)) \Big\rangle_x -$$

$$- \frac{1}{2}\,\delta_{a\mu}\,(\delta(x - x_1) + \delta(x - x_0))\,\hat{G}(1,0)\,, \qquad (8)$$

где $\hat{G}(1,0)$ – свободный пропагатор дираковской частицы. Усреднение в (8) по $x^\mu(t)$ и $\psi_a(t)$ понимается в смысле континуального интегрирования по этим переменным с граничными условиями (6). Поскольку вычисление проводится уже в плоском пространстве, то объекты γ_μ удовлетворяют (после вычисления интеграла) обычным антикоммутационным соотношением:

$$[\,\gamma_\mu\,,\ \gamma_\nu\,]_+ = -\,\delta_{\mu\nu}\,.$$

Интегрирование по полям $\psi_a(t)$ проводится в (8) по следующим правилам:

$$\langle \psi_\lambda(t)\rangle_\psi = \gamma_\lambda\,, \qquad \langle \psi_\lambda(t)\ \psi_a(\tau)\,\psi_\nu(\tau)\rangle_\psi =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\gamma_\lambda\,\gamma_a\,\gamma_\nu - \gamma_\nu\,\gamma_a\,\gamma_\lambda) + \frac{1}{2}\epsilon(t-\tau)\,(\gamma_\nu\,\delta_{a\lambda} - \gamma_a\,\delta_{\nu\lambda})\,. \qquad (9)$$

Сингулярности $\sim \delta(0)$ в (8) точно сокращаются (это можно показать с помощью дискретного представления для континуального интеграла по переменным $x^\mu(t)$). Вычисляя (8) с помощью формулы (9), будем иметь:

$$\hat{j}_{a\mu}(1,0\,|\,x) = -\frac{1}{2(2\pi)^{D/2}}\{(\partial_0 - \partial_1)_\mu\,\not{\partial}_1\gamma_a\not{\partial}_0 + a \longleftrightarrow \mu\}\,G_{1x}\,G_{x0} +$$

$$+ \frac{1}{2}\not{\partial}_1 G_{1x}\,\gamma_\mu\,\gamma_a\,\delta_{x0} + \frac{1}{4}\,\delta_{\mu a}\not{\partial}_1\,G_{1x}\,\delta_{x0} + \frac{1}{2}\delta_{1x}\,\gamma_a\gamma_\mu\not{\partial}_x G_{x0} +$$

$$+ \frac{1}{4}\,\delta_{a\mu}\,\delta_{1x}\not{\partial}_x\,G_{x0} - \frac{1}{2}\delta_{a\mu}\,(\delta_{1x} + \delta_{x0})\,\hat{G}_{10}\,, \qquad (10)$$

где

$$\Box_x\,G_{xy} = -(2\pi)^{D/2}\,\delta_{xy}\,, \qquad \delta_{xy} = \delta(x-y)$$

$$\Box = \partial_\mu\,\partial_\mu\,, \qquad \not{\partial} = \gamma_\mu\,\partial_\mu\,.$$

Переходя в (10) к общепринятой нормировке, окончательно получаем

$$\hat{j}_{a\mu}(1,0\,|\,x) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\{-\frac{1}{4}\Big(\hat{J}_{1x}\,\Gamma_a\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu\,\hat{J}_{x0} + \hat{J}_{1x}\,\Gamma_\mu\overset{\leftrightarrow}{\partial}_a\hat{J}_{x0}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{4}\,(\hat{J}_{1x}\,\Gamma_\mu\,\Gamma_a\,\delta_{x0} + \delta_{1x}\,\Gamma_a\,\Gamma_\mu\,\hat{J}_{x0}) - \frac{3}{4}\Big(\hat{J}_{1x}\,\delta_{x0} + \delta_{1x}\,\hat{J}_{x0}\Big)\}\,, \qquad (11)$$

где

$$[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \Gamma_\lambda \partial^x_\lambda \hat{J}_{xy} = -\delta_{xy}.$$

Результат (11) с точностью до несущественного множителя совпадает с разложением уравнения первого порядка для функции Грина дираковской частицы во внешнем гравитационном поле по отклонению репера $V_{a\mu}$ от $\delta_{a\mu}$. Подробности вычисления будут опубликованы. Представление для функции Грина уравнения первого порядка для дираковской частицы во внешних электромагнитном и неабелевом калибровочном полях было получено в [4-6].

Авторы благодарны А.А.Цейтлину за обсуждение свойств меры интегрирования в искривленном пространстве.

Литература

1. *Brink L., Di Vecchia P., Howe P.* Nucl. Phys., 1977, **B118**, 76.
2. *De Witt B.S.* Phys. Rev., 1952, **85**, 653; Rev. Mod. Phys., 1957, **29**, 377.
3. *De Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Roncadelli M.* Nucl. Phys., 1988, **B296**, 402; Preprint CERN-TH.4849/87.
4. *Маршаков В.В., Файнберг В.Я.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **46**, 253.
5. *Fainberg V.Ya., Marshakov A.V.* Lebedev Inst. Preprint, 1987, №338; Nucl. Phys. B, in press.
6. *Маршаков А.В., Файнберг В.Я.* Краткие сообщения по физике. ФИАН, 1988, № 3.
7. *Mizrahi M.* J. Math. Phys., 1975, **16**, 2201.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2 марта 1988 г