Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 11, стр. 545 – 547 *10 июня 1988 г.*

ТЕОРЕМЫ О НЕПЕРЕНОРМИРОВКЕ ДЛЯ ГЕТЕРОТИЧЕСКИХ СТРУН

Р.Э.Каллош, А.Ю.Морозов

При многопетлевых вычислениях в формализме Грина – Шварца сохраняются четыре нулевые моды грассмановых θ-полей, связанные с подалгеброй глобальной пространственно-временной суперсимметрии. Это позволяет доказать теоремы о занулении 0-, 1-, 2-, 3-точечных функций.

1. Одной из задач современной теории суперструн является разработка формализма Грина–Шварца [1], обладающего явной суперсимметрией в пространстве–времени. В этой статье мы опишем представляющийся нам адекватным подход к многопетлевым вычислениям в рамках этого формализма и объясним, почему нам кажется очевидным, что 0-, 1-, 2-, 3-точечные функции при таком подходе обращаются в нуль. При этом мы основываемся на идеях, развитых в [2].

2. Действие Грина –Шварца [1] выглядит следующим образом:

$$\int d^2z\left[\frac{1}{2}\sqrt{g}\,g^{ab}\,\Pi_a^{\mu}\Pi_{b\mu} - i\epsilon^{ab}\,\partial_a X^{\mu}\,(\bar{\theta}\gamma_{\mu}\partial_b\theta)+\mathcal{L}'\right] = \frac{1}{2}\int d^2z\ \times$$

$$\times\ \sqrt{g}\,g^{ab}\,\Pi_a^{\mu}\Pi_{b\mu} + i\int d^3z\,\epsilon^{abc}\,\Pi_a^{\mu}(\partial_b\bar{\theta}\gamma_{\mu}\partial_c\theta)+\int d^2z\,\mathcal{L}'\,;\qquad \Pi_a^{\mu}\equiv\partial_a X^{\mu}-i\bar{\theta}\gamma^{\mu}\partial_a\theta\,,$$

и содержит только тензоры с целым спином на мировом листе. В [2] мы показали, что всякий раз, когда на пространственно-временные спиноры θ (которые являются скалярами на мировом листе) может быть наложена "калибровка светового конуса",

$$\theta^{+}\equiv\frac{1}{2}\gamma^{-}\gamma^{+}\theta = 0, \tag{2}$$

теория (после квантования в конформной калибровке для метрики) описывается квадратичным действием

$$\int d^2z\,[\,\partial X^{+}\bar{\partial}X^{-} + \partial X^{i}\bar{\partial}X^{i} + \eta^{-}_{\bar{z}}\,\partial_z\vartheta^{-} + b\bar{\partial}c+\bar{b}\partial c + \mathcal{L}'\,]\,, \tag{3}$$

где поля $\eta^{-}_{\bar{z}}$ являются 1-дифференциалами на мировом листе (и спинорами в пространстве-времени) с неестественной нормой:

$$\|\,\eta_{\bar{z}}\|^{2} = \int|\eta_{\bar{z}}|^{2}\,\frac{\sqrt{g}}{|\bar{\partial}X^{+}|^{2}}\ .$$

Критическим усложнением в случае многопетлевых вычислений оказывается запрет на наложение калибровочного условия (2). Дело в том, что калибровочные преобразования действуют на θ^+ по правилу

$$\delta\theta^+ = \Pi^+ \gamma^- k\,, \qquad \gamma^+ k = 0, \tag{4}$$

где k – спинор в пространстве–времени и – 1-дифференциал (вектор) на мировом листе. Являясь 1-дифференциалом, $\bar{\partial} X^+$ – ненильпотентная часть $\Pi^+_{\bar{z}}$ – обязана иметь нули на любой римановой поверхности рода $p \geqslant 2$. В соответствии с теоремой Эйлера полное число этих нулей не может быть меньше $2p - 2$. Обозначим положения нулей $\bar{\partial} X^+$ через Q_m, $m = 1 \ldots M \geqslant 2p - 2$. Из-за этих нулей значения θ^+ в точках Q_m не изменяются при калибровочных преобразованиях (4). В результате наложить на $\theta(z)$ калибровочное условие в форме (2) невозможно. Вместо этого можно потребовать, чтобы

$$\theta^+(z) = \sum_{m=1}^{M} \xi_m \, \delta^2 (z - Q_m). \tag{5}$$

Мы собираемся интегрировать вначале по θ-полям, считая X-поля фиксированными. Поэтому положения точек $Q_m \{X\}$ на этом этапе считаются заданными. Интегрирование по θ-полям приводит к ответу, зависящему от $Q_m \{X\}$. Его следует впоследствии интегрировать по X-полям.

3. В конформной калибровке действие с необходимыми духовыми добавками имеет вид:

$$S_{quant} = S_{cl}(X, \theta) + S_{gh}(X, \theta, \ldots) + \pi(\gamma^+ \theta - \sum_{m=1}^{M} \xi_m \, \delta^2(z - Q_m)). \tag{6}$$

S_{gh} в (6) может быть определено из уравнений (35), (36) статьи [3]. Действие (6) после интегрирования по π содержит не более чем квадратичную зависимость от ξ_m:

$$S_{quant} = \int O_{(0)} + \sum_{m=1}^{M} \xi_m \int \delta^2 (z - Q_m) \, O_{(1)} + \sum_{m,\,n=1}^{M} \xi_m \xi_n \iint \delta^2(z - Q_m) \delta^2(z' - Q_n) O_{(2)}. \tag{7}$$

Здесь $\int O_{(0)}$ – действие (3), т. е. $\int O_{(0)} = S_{quant}\,|_{\theta^+ = \pi = 0}$, а операторы $O_{(1)} O_{(2)}$ определяются из (6) как вариационные производные от S_{quant} по θ^+ при $\pi = 0$, $\theta^+ = 0$.

Таким образом, операторы $O_{(1)}, O_{(2)}$ являются определенными комбинациями полей X, θ^- и духов. После интегрирования по грассмановым переменным ξ_m мы получим коррелятор этих полей $\langle \hat{O} \rangle$, который является очевидной комбинацией $O_{(1)}$ и $O_{(2)}$; среднее определено как функциональный интеграл с действием $S_0 = \int O_{(0)}$, приведенным в (3).

4. Мы покажем теперь что, в отличие от нетривиальных формул для амплитуд рассеяния четырех и большего числа частиц, теоремы о перенормировке для 0-, 1-, 2-, 3-точечных функций нечувствительны к детальному виду коррелятора $\langle \hat{O} \rangle$.

Зануление 0-, 1-, 2-, 3-точечных функций в формализме Грина – Шварца связано с существованием четырех нулевых мод поля ϑ^- в действии (3). Однако, вставка оператора $\hat{O}$ могла бы в принципе поглотить нулевые моды и привести к нарушению теоремы о перенормировке. На самом деле этого не происходит, и причиной тому является глобальная пространственно-временная суперсимметрия.

Разложим исходное поле θ на два $SO(8)$ спинора: $\theta = \theta^+ + \theta^-$; $\theta^\pm = \frac{1}{2}\gamma^\mp \gamma^\pm \theta$, а затем – на четыре 4-компонентных комплексных $SU(4)$ спинора, $\theta^+ = \eta^+ + \vartheta^+$, $\theta^- = \eta^- + \vartheta^-$. (В калибровке (2) η^+ и ϑ^+ отсутствуют, а η^- связано с $\eta^-_{\bar{z}}$ в действии (3): $\eta^-_{\bar{z}} = \bar{\partial} X^+ \eta^- \gamma^-$. См. подробности в [2]). Интересующие нас четыре постоянные нулевые моды действия (3) – это моды 4-компонентного поля ϑ^- (в случае рода $p = 1$ $\eta^-_{\bar{z}}$ также имеют четыре постоянные нулевые моды, но для $p \geqslant 2$ это уже не так). Теоремы о перенормировке эквивалентны утверждению, что действие (6) имеет те же постоянные нулевые моды ϑ^-, что и (3).

Действие (6) равно сумме действия (1), в которое подставлено (5) вместо θ^+, и вклада, зависящего от духовых полей, который появляется в процессе квантования. Наша цель — показать, что при подходящем выборе полей X действие (6) не меняется, когда мы сдвигаем поля ϑ^-, $\delta\vartheta^- = \epsilon^- = \text{const}$ и не трогаем остальные поля.

До фиксации калибровок в теории имелась глобальная пространственно-временная суперсимметрия вида $\delta\vartheta^- = \epsilon^- = \text{const}$, $\delta X^\mu = i\bar{\epsilon}^-\gamma^\mu\theta$, т. е. $\delta X^+ = 0$, $\delta X^- = i\bar{\epsilon}^-\gamma^-\eta^-$,

$$\delta X^i = i\bar{\epsilon}^-\gamma^i\eta^+ \qquad (\text{а } \delta\vartheta^+ = \delta\eta^+ = \delta\eta^- = 0) .$$

Под знаком континуального интеграла всегда можно сделать сдвиг

$$X^\mu \to \widetilde{X}^\mu, \ \widetilde{X}^+ \equiv X^+, \ \widetilde{X}^- \equiv X^- - i\bar{\vartheta}^-\gamma^-\eta^- ; \ \widetilde{X}^i = -i\bar{\vartheta}^-\gamma^i\eta^+ .$$

Якобиан этого преобразования равен единице. Теперь действие инвариантно по отношению к сдвигу $\delta\vartheta^- = \epsilon^- = \text{const}$, причем $\delta\widetilde{X}^\mu = 0$, $\delta\vartheta^+ = \delta\eta^+ = \delta\eta^- = 0$. Поэтому в пространстве полей имеются хорошо определенные постоянные гармоники:

$$\vartheta_0^- = \text{const}, \ \widetilde{X}_0^\mu = 0, \ \vartheta_0^+ = 0, \ \eta_0^+ = 0, \eta_0^- = 0, \text{ духовые поля} = 0, \qquad (10)$$

которые с очевидностью ортогональны ко всем остальным гармоникам и при этом не дают вклада в действие. Поэтому они являются настоящими нулевыми модами, и число их равно в точности четырем, поскольку ϑ^- 4-компонентно. (Отметим, что действие остается инвариантным также по отношению к преобразованиям

$$\delta\eta^- = \zeta^- = \text{const}, \ \delta X^\mu = i\bar{\zeta}^-\gamma^\mu\theta, \qquad \delta\vartheta^+ = \delta\eta^+ = \delta\vartheta^- = 0,$$

но они действуют нетривиально на X, и поэтому не обязаны приводить к существованию нулевых мод: мода $\eta^- = \text{const}$, $\widetilde{X}^\mu = \text{const}\,\gamma^\mu\theta$ не обязательно ортогональна к другим гармоникам уравнения Лапласа).

5. Мы думаем, что разделение θ^- на $SU(4)$-компоненты, $\theta^- = \eta^- + \vartheta^-$ является необходимой процедурой, поскольку для произвольного рода p имеется только 4 постоянных нулевых моды θ^- (а не 8, как в случае $p = 1$). Наличие 4-х нулевых мод сразу означает, что 0-, 1-точечная функция не имеет квантовых поправок, т. к. они содержат менее двух вертексов, поскольку каждая пара вертексов вносит, вообще говоря, четыре степени θ. Более детальное исследование этого вопроса с учетом $U(1)$-симметрии, т. е. замены ϑ^- на η^-, приводит к выводу, что на самом деле первый отличный от нуля матричный элемент содержит, по крайней мере, 4 вертекса. Таким образом, установлено, что в старших петлях при $p \geqslant 1$ отсутствуют квантовые поправки к 0-, 1-, 2-, 3-точечным функциям.

Мы рассматриваем это рассуждение как вполне ясный и надежный вывод теорем о неперенормировке для гетеротической струны в любом числе петель. На наш взгляд, это является подтверждением применимости формализма Грина — Шварца к реальному анализу многопетлевых выражений.

Мы признательны А.А.Рослому, Е.С.Фрадкину, А.А.Цейтлину и А.С.Шварцу за полезные обсуждения.

Литература

1. *Green M., Schwarz J.* Phys. Lett., 1984, **136B**, 367.
2. *Kallosh R., Morozov A.* Preprint ITEP-88/29.
3. *Kallosh R.* Phys. Lett., 1987, **195B**, 369.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 марта 1988 г.