Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 12, стр. 647 – 649 *25 июня 1988 г.*

СПИНОВЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНДЕКС В ^{3}He.

А.В.Балацкий

На примере доменной стенки в ^{3}He-B показано, что спектр квазичастиц зависит от спина. Показано, также, что существует модифицированный топологический индекс, из которого следует "зацепление" энергии со спином.

В последнее время возрос интерес к топологическим свойствам спектра квазичастиц в сверхтекучих фазах. ^{3}He [1-4]. Сложность параметра порядка в сверхтекучем ^{3}He приводит к множеству возможностей для различных топологических возбуждений (доменные стенки, вихри и т. д), что, в свою очередь, проявляется в топологии спектра квазичастиц.

При микроскопическом описании в терминах оператора Боголюбова для квазичастиц нахождение спектра представляет собой нетривиальную задачу при наличии сложной текстуры параметра порядка. Поэтому естественно стремление иметь простые характеристики спектра, позволяющие делать непосредственно физические выводы. Например, в случае текстур в A-фазе [1], наличие бесщелевой ветви спектра приводит к существованию неспаренных фермионов при $T = 0$. Одной из таких характеристик является η – инвариант. А именно при нахождении спектра:

$$H_{\text{Б}}\Psi = E\Psi\ , \tag{1}$$

где $H_{\text{Б}}$ – оператор Боголюбова, а Ψ – боголюбовский спинор, можно ввести грубую топологическую характеристику спектра – спектральную асимметрию гамильтониана $H_{\text{Б}}$ или иначе его индекс:

$$\eta\ [H_{\text{Б}}] = \sum_{E>0} 1 - \sum_{E<0} 1\ . \tag{2}$$

Индекс показывает меру отличия уровней с положительной и отрицательной энергией (при этом формула (2) должна быть соответственно регуляризована). В работе [2] показано, что из $\eta \neq 0$ непосредственно следуют важные физические следствия (нормальная компонента, нескомпенсированный ток и т. п.). Однако при рассмотрении A-фазы предполагалось вырожденность спектра по спину. Вообще говоря это не имеет места. Примером могут служить доменные стенки в B-фазе, границы раздела A- и B-фаз, коры различных вихрей в сверхтекучем ^{3}He. В этой статье будет показано на примере доменной стенки в B-фазе, что в спектре квазичастиц снимается вырождение по спину. При этом требуется аккуратное определение индекса η с учетом спиновой степени свободы.

Для этого рассмотрим доменную стенку в B-фазе вида:

$$A_{\mu i} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \operatorname{th} x/\lambda & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\ , \tag{3}$$

Выбор параметра порядка в виде (3) близок к численному решению, найденному в [4], и удобен для аналитического рассмотрения. Для этого параметра порядка оператор Боголюбова имеет следующий вид [2]:

$$H_{\text{Б}} = \tau_3\left(\frac{p^2}{2} + \tilde{\epsilon}\right) + \alpha\tau_1\,(\sigma_x p_z - \sigma_z p) + \alpha\tau_2 p_y\, iT\partial_p\ , \tag{4}$$

где мы линеаризовали $\operatorname{th} x/\lambda$, $T = \lambda^{-1}$ в окрестности $x = 0$, и перешли к импульсному представлению, $\tilde{\epsilon} = \dfrac{p_z^2 + p_y^2}{2} - \mu$, $\alpha = \Delta_0/k_F$, Δ_0 – модуль щели, τ_i – матрица Паули в пространстве частицы — дырка, а σ_i — матрица Паули в спиновом пространстве. После унитарного преобразования: $\widetilde{H} = U^{-1} HU$, $\widetilde{\Psi} = U\Psi$

$$U = \exp(i\tau_2 \, ^{\pi}/_4 + i\varphi/2\sigma_y), \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = -p_z/p_0. \tag{5 а}$$

Имеем:

$$\widetilde{H} = \tau_3 \alpha \sigma_z (p_0^2 + p_z^2)^{1/2} - \tau_2 \left(\frac{p_0^2}{2} + \widetilde{\epsilon} + p_0 m\right) + \alpha \tau_2 T p_y \, i\partial_m \tag{5б}$$

где мы разложили координату $p \approx p_0 + m$, $p_0 = \pm\sqrt{-2\widetilde{\epsilon}}$ (подробнее приближенный способ решения описан в [2]. В итоге находим аномальный уровень спектра:

$$E_0 = \alpha S_z (2\mu - p_y^2)^{1/2} \, \mathrm{sgn}\,(Tp_y p_0)$$

$$\widetilde{\Psi}_{n=0} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{p_0 m^2}{2\alpha T p_y}\right)\theta\,(p_0/Tp_y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{p_0 m^2}{2\alpha T p_y}\right)\theta\,(-\, ^{p_0}/_{Tp_y}), \tag{6}$$

$$S_z \Psi_0 = \hat{\sigma}_z \Psi_0 .$$

$\mathrm{sgn}\, x$ и $\theta(x)$ — знаковая и ступенчатая функции. Найденный аномальный уровень (6) очевидным образом нарушает симметрию $p_y \to -p_y$ и зависит от проекции спина S_z (в преобразованных координатах). Отсюда немедленно следует перенос спина вдоль оси y, т. е. вдоль доменной стенки течет спиновый ток $j_y^{\sigma_z}$ [1]. Щель в спектре обращается в нуль при $p_y = \pm k_F$. Рассмотренное приближение не позволяет вычислить плотность состояний $N(E=0)$ поскольку используемое разложение $p \approx p_0 + m$ при $E \to 0$ некорректно $(p_y \to \pm k_F$ $\widetilde{\epsilon} \to 0$, $p_0 \to 0)$. Однако это не мешает сделать важные выводы о топологии спектра.

Перейдем непосредственно к вычислению индекса $\eta[H]$. Поскольку найдена аномальная ветвь спектра (6), то можно написать η в конкретном представлении. Нетрудно видеть, что выражение для индекса (2) нуждается в доопределении, т. к. имеется дискретный параметр S_z, в зависимости от которого энергия нулевого уровня меняет знак. Следуя (2) получаем неправильный ответ $\eta = 0$, так как вклады ветвей с $S_z = \pm 1$ взаимно сокращаются. Для аналитического вычисления используют формулу [2]:

$$\eta[H] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{Tr} \int_0^\infty dy\, e^{-y^2 H^2} H = \sum_n \frac{E_n}{|E_n|}, \tag{7}$$

где Tr след по полной системе функции и по спинам. В случае со спектром (6) формула (7) приводит к тривиальному ответу $\eta = 0$ в силу упомянутой зависимости энергии от спина. Это противоречие легко разрешается, если заметить, что в (7) под знак Tr следует вставить проектор $P_\pm$, который приводит к взятию следа по функциям с определенным значением спина. В нашем случае $P_\pm = (1 \pm \sigma_z)/2$. В итоге имеем:

$$\eta_\pm = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{Tr} \int_0^\infty \mathrm{d}y\, P_\pm H e^{-y^2 H^2} P_\pm = \pm\, \mathrm{sgn}\, Tp_y\, \theta(-\widetilde{\epsilon}), \tag{8}$$

откуда следует, что асимметрия спектра зависит от проекции спина, что мы и нашли в приближенном решении.

Таким образом, в этой работе показано, что спектр квазичастиц в системах со сложными параметрами порядка (на примере B-фазы) зависит от спина. Нетривиальная зависимость от спина, т. е. от некоторого дискретного параметра задачи, дается модифицированным индек-

---

1) В случае доменной стенки другого вида зависимость энергии от спина найдена также в [4].

сом, в котором необходимо учитывать проектор на состояния с определенным спином. Заметим также, что снятие вырождения по спину (крамерсовского вырождения) происходит без магнитного поля. Система остается инвариантной относительно обращения времени при наличии доменной стенки. Зацепление спина с импульсом квазичастиц происходит без спин-орбитального взаимодействия и это связано со свойствами однородного параметра порядка – в *B*-фазе спиновый и орбитальный моменты компенсируют друг друга. По-видимому, аналогичные явления должны иметь место и в других объектах – корах вихрей, границах раздела *A* – *B*-фаз.

Мне приятно поблагодарить Г.Е.Воловика за полезные обсуждения.

Литература

1. *Балацкий А.В., Воловик Г.Е., Конышев В.А.* ЖЭТФ, 1986, 90, 2038.
2. *Балацкий А.В., Конышев В.А.* ЖЭТФ, 1987, 92, 841.
3. *Воловик Г. Е.* Письма в ЖЭТФ, 1987, 46, 81.
4. *Salomaa M.M., Volovik G.E.* Preprint, 1987.

Институт теоретической физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 мая 1988 г.