Письма в ЖЭТФ, том 48, вып. 1, стр. 7 – 9 10 июля 1988 г.

ЧЕТЫРЕХПЕТЛЕВАЯ ПОПРАВКА К $\sigma_{tot}(e^+e^- \to$ АДРОНЫ) В КХД И ПРОБЛЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА $\Lambda_{\overline{MS}}$

С.Г.Горишний[1], *А.Л.Катаев, С.А.Ларин*

Приведены результаты вычислений четырехпетлевой поправки порядка $O(\alpha_s^3)$ к $\sigma_{tot}(e^+e^- \to$ адроны) в КХД. Обсуждается влияние найденной большой поправки на процедуры определения значения параметра $\Lambda_{\overline{MS}}$ из данных e^+e^--коллайдеров в различных областях энергий.

На протяжении последних лет процесс e^+e^--аннигиляции в адроны рассматривался как один из наиболее чистых в теоретическом плане тестов КХД. Его важной характеристикой является отношение $R(s) = \sigma_{tot}(e^+e^- \to$ адроны$) / \sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ для которого в настоящее время имеется экспериментальная информация в широкой области энергий 0,25 ГэВ $\lesssim \sqrt{s} \lesssim$ 50 ГэВ и ожидаются прецизионные измерения на пике Z^0-бозона. Анализ полученных данных с использованием конечно-энергетических правил сумм [1], введенных в [2] бореловских правил сумм [3,4], сравнения $R_{\text{теор}}(s) \approx R_{\text{эксп}}(s)$ в области выше порогов образования b-кварков [5,6] и других методов позволял надеяться на возможность получения достоверной информации о величине параметра КХД $\Lambda_{\overline{MS}}$. Действительно, в силу того, что трехпетлевые поправки теории возмущений (ТВ) порядка $O(\alpha_s^2)$ к $R(s)$ оказались малыми [7], представлялось, что применимость ТВ к описанию поведения $R(s)$ не вызывает сомнений.

В настоящей заметке мы хотим кратко обсудить проблемы выявившиеся при аналитическом вычислении следующей поправки порядка $O(\alpha_s^3)$. Непосредственный расчет был проведен в евклидовой области $Q^2 = -q^2 > 0$ для функции

$$D(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{R(s)}{(s+Q^2)^2}\, ds. \tag{1}$$

Учет эффектов аналитического продолжения $D(Q^2)$ в физическую область приводит к появлению в $R(s)$ в интересующем нас порядке ТВ дополнительного члена, пропорционального π^2:

$$R(s) = D(s) - 3\Sigma Q_f^2 \pi^2 \frac{\beta_0^2}{3}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 , \tag{2}$$

где β_0 – первый коэффициент β-функции КХД, для которой известно трехпетлевое выражение в схеме MS [8]:

$$\frac{1}{\pi}\mu^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu^2} = \beta(\alpha_s) = -\beta_0\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 - \beta_1\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 - \beta_2\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^4 , \tag{3}$$

$$\beta_0 = \left(11 - \frac{2}{3}f\right)\frac{1}{4}, \qquad \beta_1 = \left(102 - \frac{38}{3}f\right)\frac{1}{16}, \qquad \beta_2 = \left(\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}f + \frac{325}{54}f^2\right)\frac{1}{64}.$$

С учетом поправки порядка $O(\alpha_s^3)$ перенормированное выражение для $R(s)$ имеет следующий вид:

$$R(s) = 3\Sigma Q_f^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \left(a_1 - a_2 \ln\frac{s}{\mu^2}\right)\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(b_1 - b_2 \ln\frac{s}{\mu^2} + b_3 \ln^2\frac{s}{\mu^2}\right)\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 \right\} - (\Sigma Q_f)^2 c_1 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 . \tag{4}$$

---

[1] Объединенный институт ядерных исследований

В схеме $\overline{MS}$ трехпетлевой коэффициент порядка $O(\alpha_s^2)$ не велик: $a_1 = 1{,}986 - 0{,}115f$ [7]. Для нахождения поправки порядка $O(\alpha_s^3)$ потребовалось вычислить вклады более 100 четырехпетлевых диаграмм. Расчеты были проведены с помощью специальной программы на языке системы аналитических вычислений *SCHOONSCHIP* [9], реализующей алгоритм интегрирования по частям [10]. Приведем численные значения найденных нами четырехпетлевых коэффициентов в схеме $\overline{MS}$;

$$b_1 = 70{,}985 - 1{,}200f - 0{,}005f^2, \quad c_1 = 1{,}679, \tag{5}$$

а также коэффициентов перед логарифмическими членами: $a_2 = 2{,}75 - 0{,}167f$, $b_2 = 17{,}298 - 2{,}086f + 0{,}038f^2$, $b_3 = 7{,}562 - 0{,}917f + 0{,}028f^2$. Они могут быть также найдены с помощью ренормгрупповых соотношений $a_2 = \beta_0$, $b_2 = \beta_1 + 2\beta_0 a_1$, $b_3 = \beta_0^2$. Проверка их справедливости послужила тестом правильности расчетов. Применение ренормгруппы к (4) эквивалентно занулению логарифмических членов и замене $\alpha_s \to \bar{\alpha}_s$, причем бегущую константу связи можно выразить через $L = \ln(s/\Lambda^2_{\overline{MS}})$:

$$\frac{\bar{\alpha}_s}{\pi} = \frac{1}{\beta_0 L} - \frac{\beta_1 \ln L}{\beta_0^3 L^2} + \frac{1}{\beta_0^5 L^3}(\beta_1^2 \ln^2 L - \beta_1^2 \ln L + \beta_2 \beta_0 - \beta_1^2). \tag{6}$$

Для рассмотрения влияния вычисленной нами большой поправки (5) на значение параметра $\Lambda_{\overline{MS}}$ мы будем использовать результат $\bar{\alpha}_s$ (34^2 ГэВ^2) $= 0{,}145 \pm 0{,}020$, который был недавно получен из сравнения трехпетлевого приближения для *R(s)* в схеме $\overline{MS}$ с данными ускорителей *PETRA* и *PEP* [6]. Для трехпетлевого приближения, учитывая первые два члена в (6), получаем $\Lambda_{\overline{MS}} = 280^{+230}_{-165}$ МэВ. Учет четырехпетлевой поправки (5) и полного выражения (6) приводит к результату $\bar{\alpha}_s$ (34^{2}ГэВ^2) $= 0{,}132^{+0{,}013}_{-0{,}016}$ и приблизительно двухкратному (!) уменьшению параметра $\Lambda_{\overline{MS}}$: $\Lambda_{\overline{MS}} = 155^{+125}_{-85}$ МэВ. Подчеркнем, что согласие этой оценки со значениями $\Lambda_{\overline{MS}}$, полученными из других процессов [11], может рассматриваться как успех ТВ в КХД только при условии, что высшие поправки к *R(s)* и характеристикам других процессов не будут превосходить учтенные эффекты.

Рассмотрим ряд ТВ в нашем случае. Для значения $\bar{\alpha}_s \approx 0{,}132$ и $f = 5$ выражение для *R(s)* в схеме $\overline{MS}$ имеет вид [2)]:

$$R(s) = \frac{11}{3}(1 + 0{,}042 + 0{,}0025 + 0{,}0048) \tag{7}$$

Видно, что последний учтенный член приблизительно в два раза превышает предыдущий.

Нет сомнения, что ряды ТВ являются асимптотическими. При этом считается, что их точность определяется первым отброшенным членом. Возможен случай, когда минимальная поправка находится среди неизвестных членов (7). Тогда учет вычисленной поправки в анализе имеющихся данных ускорителей *PEP*, *PETRA* и *TRISTAN*, а также будущих данных коллайдеров *SLC* и *LEP* является корректным. Однако, если минимальным окажется уже третий член (7), то наибольшую точность будет иметь приближение ТВ, содержащее лишь первые два члена этого ряда. Его использование не позволяет корректно определить значение параметра $\Lambda_{\overline{MS}}$, так как фиксирующие схему члены порядка $O(\alpha_s^2)$ при этом отбрасываются

При переходе в область меньших энергий (т. е. больших значений $\bar{\alpha}_s$) учет высших поправок ТВ является еще более проблематичным. Действительно рассмотрим обработку низкоэнергетических данных e^+e^--коллайдеров при помощи метода борелевских правил сумм [2]

$$M_n = \frac{1}{M^2}\int_0^\infty R(s)\, e^{-s/M^2}\left(\frac{s}{M^2}\right)^n ds. \tag{8}$$

[2)] При выводе (7) учитывалось, что для $f = 5$ последний член в (4) подавлен фактором $(\Sigma Q_f)^2/3\Sigma Q_f^2 = 1/33$.

При $f = 3$ вклады ТВ в первые два правила сумм имеют вид

$$M_0 = 1 + \frac{\bar{\alpha}_s}{\pi} + \left(\frac{\bar{\alpha}_s}{\pi}\right)^2 2{,}939 + \left(\frac{\bar{\alpha}_s}{\pi}\right)^3 83{,}919 \quad ,$$

$$M_1 = 1 + \frac{\bar{\alpha}_s}{\pi} + \left(\frac{\bar{\alpha}_s}{\pi}\right)^2 0{,}690 + \left(\frac{\bar{\alpha}_s}{\pi}\right)^3 66{,}698 \tag{9}$$

где $\bar{\alpha}_s = \bar{\alpha}_s(M^2)$. В области $M^2 \sim 1$ ГэВ^2, в которой проводилось фитирование [3,4], ряды ТВ взрываются. Действительно, поправки порядка $O(\bar{\alpha}_s^3)$ в (9) сравниваются по величине с лидирующими $O(\bar{\alpha}_s)$ поправками для значения $\bar{\alpha}_s \approx 0{,}38$, достигаемого в процессе обработки [3,4]. Таким образом, оценки $\Lambda_{\overline{MS}} = 100 \div 200$ МэВ полученные в [3,4] не могут считаться надежными. В этих случаях, по всей видимости, обоснованным является использование лишь первых двух членов рядов (9). Однако, как уже отмечалось, это не позволяет корректно определить значения параметра $\Lambda_{\overline{MS}}$, так как фиксирующие схему члены при этом отбрасываются.

Мы благодарны В.А.Матвееву, А.Н.Тавхелидзе и Д.В.Ширкову за поддержку работы и полезные обсуждения. Мы также признательны сотрудникам теоретического отдела ИЯИ, в особенности Ф.В.Ткачеву и К.Г.Четыркину, и сотрудникам ЛТФ ОИЯИ за многочисленные дискуссии на различных этапах работы.

Литература

1. *Chetyrkin K.G., Krasnikov N.V., Tavkhelidze A.N.* Phys. Lett., 1978, **76B**, 83.
2. *Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.* Nucl. Phys., 1979, **B147**, 385.
3. *Eidelman S.I., Kurdadze L.M., Vainshtein A.I.* Phys. Lett., 1979, **82B**, 278.
4. *Grozin A.G., Pinelis Yu. F.* Preprint INP 87-50, 1987.
5. *Behrend H.J. et al.* CELLO Collab. Phys. Lett., 1987, **183B**, 400.
6. *De Boer W.* Preprint SLAC-PUB-4428, 1987.
7. *Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V.* Phys. Lett., 1979, **85B**, 277.
8. *Tarasov O.V., Vladimirov A.A., Zharkov A.Yu.* Phys. Lett., 1980, **93B**, 429.
9. *Горишний С.Г., Ларин С.А., Ткачев Ф.В.* Препринт ИЯИ, П-0330, 1984.
10. *Chetyrkin K.G., Tkachov F.V.* Nucl. Phys., 1981, **B192**, 159.
11. *Duke D.W., Roberts R.G.* Phys. Rep., 1985, **120**, 275.

Институт ядерных исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 мая 1988 г.