

Бифуркации и устойчивость поверхностных солитонов огибающих для жидкости конечной глубины

Д. С. Агафонцев¹⁾

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 января 2008 г.

Исследуется динамика квазимонохроматических поверхностных гравитационных волн для жидкости конечной глубины при произведении волнового числа и глубины жидкости, близком к критическому $k_{cr}h \approx 1.363$. В рамках гамильтонова формализма выведено обобщенное нелинейное уравнение Шредингера, которое по сравнению с классическим НУШ учитывает градиентные члены к четырехволновому взаимодействию, а также шестиволновое взаимодействие. С помощью полученного уравнения исследованы модуляционная неустойчивость монохроматических волн, а также бифуркации солитонных решений и их устойчивость. Показано, что в случае фокусирующей нелинейности солитоны устойчивы относительно конечных возмущений, тогда как в случае дефокусирующей – неустойчивы.

PACS: 05.45.Yv, 47.20.Ky, 47.55.Dr

1. Модуляционная неустойчивость слабонелинейных периодических гравитационных волн на поверхности жидкости – волн Стокса – была открыта Бенджамином и Фейром [1] в 1967 г. В частности, в этой работе было показано, что модуляционная неустойчивость возникает при $k_0h > k_{cr}h \approx 1.363$, где k_0 – волновое число волны Стокса, а h – глубина жидкости. В 1968 г. Захаров [2] независимо пришел к тому же выводу для гравитационных волн на глубокой воде. Область неустойчивости Бенджамина-Фейра в пространстве волновых чисел возмущений пропорциональна амплитуде волны Стокса, то есть в пределе малых амплитуд неустойчивые возмущения представляют собой модуляции исходной волны. Последнее обстоятельство послужило основанием для вывода нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) для огибающих. В [2] вывод НУШ основан на применении гамильтонова формализма.

Следует отметить, что существование модуляционной неустойчивости относительно длинноволновых модуляций монохроматической волны фактически содержалось в более ранних (1966 г.) работах Уизема [3, 4], где с использованием метода усреднения по быстрым осцилляциям было показано, что при переходе k_0h через критическое значение усредненные уравнения движения изменяют свой тип, являясь при $k_0h < k_{cr}h$ гиперболическими и соответственно эллиптическими при $k_0h > k_{cr}h$.

В 1972 г. Хасимото и Оно [5] вывели НУШ для гравитационных волн в жидкости конечной глубины

и установили, что устойчивость монохроматических волн определяется знаком коэффициента перед кубической нелинейностью, который обращается в ноль при $k_0h = k_{cr}h$.

В 1977 г. Джонсоном [6] была предпринята попытка исследовать устойчивость стоксовых волн вблизи критического значения $k_{cr}h$. Для этого непосредственно из уравнений движения было выведено уравнение на огибающую первой гармоники с учетом членов следующего порядка малости по сравнению с [1]. При этом полученное уравнение потеряло свою изначальную гамильтонову структуру, а также имело нелокальный член, аналогичный найденному Дистом [7] для гравитационных волн на глубокой воде. Кроме того, было получено, что с ростом амплитуды волны увеличивалась ее область устойчивости в k -пространстве.

В данной работе в рамках гамильтонова формализма выведено одномерное обобщенное нелинейное уравнение Шредингера, содержащее локальный градиентный член к четырехволновому взаимодействию и шестиволновое взаимодействие. По сравнению с работой Джонсона [6] данное уравнение не содержит каких-либо нелокальных членов. Установлено, что область устойчивости монохроматической волны в k -пространстве сужается с ростом ее амплитуды. Основное внимание в работе уделяется устойчивости солитонов огибающих и их бифуркациям. Солитоны характеризуются величиной $-\lambda^2$, которая имеет смысл энергии солитона как связанного состояния для НУШ. Показано, что при $\lambda \rightarrow 0$ солитоны испытывают мягкую либо жесткую бифуркации в зависимости от параметра k_0h по отношению к кри-

¹⁾e-mail: dmitrij@itp.ac.ru

тическому значению. Анализ устойчивости показал, что солитоны, соответствующие мягкой бифуркации, устойчивы, тогда как солитоны, соответствующие жесткой, неустойчивы относительно конечных возмущений.

2. Рассмотрим двумерную идеальную несжимаемую жидкость конечной глубины в поле тяжести со свободной поверхностью. Выберем безразмерные переменные таким образом, чтобы глубина жидкости h , ее плотность ρ и ускорение свободного падения g были численно равными единице. Будем задавать поверхность жидкости уравнением $z = \eta(x, t)$ так, что $\eta(x, t) \equiv 0$ в отсутствие волнения. Течение предполагается потенциальным,

$$\mathbf{v} = \nabla\phi,$$

где потенциал скорости ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \left(-\eta_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{z=\eta} = U, \quad (2)$$

$$\partial_z\phi|_{z=-1} = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \eta = 0. \quad (4)$$

Как известно, уравнение (1) с граничными условиями (2)–(4) является гамильтоновым (см. [2]). При этом гамильтониан совпадает с полной энергией,

$$H = \frac{1}{2} \int (U\Psi + \eta^2) dx, \quad (5)$$

а каноническими переменными являются значение потенциала скорости на свободной поверхности жидкости $\Psi = \phi|_{z=\eta}$ и сама поверхность η :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Psi}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}. \quad (6)$$

Для того чтобы выразить вертикальную компоненту скорости U в терминах Ψ и η , воспользуемся решением уравнения Лапласа (1) с условием непротекания жидкости через дно (3),

$$\phi(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_k \operatorname{ch}[k(z+1)] e^{ikx} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}},$$

а также определением $\Psi = \phi|_{z=\eta}$. Здесь k – волновой вектор, направленный вдоль оси x . Явное выражение для U может быть получено только путем разложения ϕ и A_k по степеням $|\nabla\eta|$ (малому углу отклонения поверхности) с последующим использованием

граничного условия (2) (см., например [8]). В итоге, гамильтониан (5) может быть выражен в виде бесконечного ряда по степеням канонических переменных Ψ и η . В силу сохранения общей массы жидкости, данное разложение начинается с квадратичного члена, который в k -пространстве имеет следующий вид:

$$H_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{(k\operatorname{th}k)|\Psi_k|^2}{2} + \frac{|\eta_k|^2}{2} \right) dk.$$

В нормальных переменных a_k и a_k^* таких, что

$$\Psi(k) = \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{-k}^* - a_k), \quad \eta(k) = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}(a_{-k}^* + a_k),$$

уравнения движения (6) принимают стандартный вид

$$i\frac{\partial a_k}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta a_k^*}, \quad H = H_0 + H_{\text{int}}. \quad (7)$$

Здесь $\omega_k = \sqrt{k\operatorname{th}k}$ является законом дисперсии линейных волн, квадратичная часть гамильтониана диагонализуеться, $H_0 = \int \omega_k |a_k|^2 dk$, а H_{int} отвечает за нелинейное взаимодействие волн.

Будем искать решение уравнения (7) в виде узкого в k -пространстве волнового пакета с несущей частотой $\omega_0 = \omega(k_0)$ и шириной $\Delta k \ll k_0$. Вследствие нелинейности, в спектре волны будут присутствовать кратные гармоники $k = nk_0$ с целым n так, что

$$\psi(x, t) = \int a_k(t) e^{ikx} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(x, t) e^{in k_0 x}, \quad (8)$$

где ψ_n – огибающая n -й гармоники. Кратные гармоники ψ_n предполагаются малыми по сравнению с основной ψ_1 по параметру $\Delta k/k_0$. Отсюда, учитывая в H_{int} только члены 3-го и 4-го порядков по a_k ,

$$H_{\text{int}} = \frac{\tilde{T}_{k_0 k_0 k_0 k_0}}{2} \times \\ \times \int a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4} \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4,$$

приходим к нелинейному уравнению Шредингера на огибающую первой гармоники ψ_1 (см., например, [9–11]; индекс 1 здесь и далее опущен):

$$i\psi_t + \frac{\omega''_k}{2} \psi_{xx} + i\omega'_k \psi_x - \omega_0 \psi - \mu |\psi|^2 \psi = 0,$$

где $\mu = (2\pi)\tilde{T}_{k_0 k_0 k_0 k_0}$, $\tilde{T}_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ – перенормированный с учетом трехволнового взаимодействия четырехволновый матричный элемент, ω'_k и ω''_k – соответственно первая и вторая производные дисперсионного соотношения $\omega(k)$ по волновому вектору k , взятые в

точке k_0 . Переходом в движущуюся со скоростью $V = \omega'_k$ систему отсчета, а также калибровочным преобразованием $\psi \rightarrow \psi e^{-i\omega_0 t}$ полученное уравнение может быть сведено к стандартному НУШ:

$$i\psi_t + \frac{\omega''_{kk}}{2}\psi_{xx} - \mu|\psi|^2\psi = 0. \quad (9)$$

Для системы гравитационных волн в жидкости конечной глубины μ может быть представлено в явном виде (сравните с [1, 6]):

$$\mu = \frac{\pi k_0^3}{2\text{th}k_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{9}{\text{th}^2 k_0} - \frac{13}{\text{ch}^2 k_0} - 2\text{th}^4 k_0 + 1 \right) - \frac{1}{(1 - c_g^2)} \left(2c_p + \frac{c_g}{\text{ch}^2 k_0} \right)^2 \right],$$

где $c_p = \sqrt{\text{th}k_0/k_0}$ и $c_g = \frac{1}{2}c_p(1 + 2k_0/\text{sh}2k_0)$ – фазовая и групповая скорости волны, соответственно. При увеличении k_0 коэффициент μ меняет свой знак с отрицательного на положительный при переходе через $k_{cr} \approx 1.363$, обращаясь в ноль при $k_0 = k_{cr}$. В нашем случае $\omega''_{kk} < 0$, что означает устойчивость монохроматической волны при $k_0 < k_{cr}$ (дефокусирующая нелинейность) и неустойчивость при $k_0 > k_{cr}$ (фокусирующая нелинейность).

Для того чтобы исследовать вопрос об устойчивости стоксовых волн вблизи k_{cr} , необходимо учесть члены высших порядков по сравнению с классическим НУШ, а именно, градиентные члены к четырехволновому взаимодействию и шестиволновое взаимодействие. В первом случае необходимо разложить четырехволновый матричный элемент $\tilde{T}_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ вблизи $k_i = k_0$, сохраняя члены первого порядка малости по $\kappa_i = k_i - k_0$. Оказывается, данное разложение содержит только локальный член (сравните, например, с [12, 13]):

$$\tilde{T}_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \frac{\mu}{2\pi} - \frac{\beta}{2\pi}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4),$$

что соответствует эффективному гамильтониану для четырехволнового взаимодействия

$$\overline{H}^{(4)} = \frac{1}{2} \int [\mu|\psi|^4 - 2i\beta(\psi_x^*\psi - \psi_x\psi^*)|\psi|^2] dx. \quad (10)$$

Вклад, соответствующий шестиволновому взаимодействию,

$$\overline{H}^{(6)} = C \int |\psi|^6 dx, \quad (11)$$

оказывается фокусирующего типа, где C – перенормированный с учетом трех-, четырех- и пятиволнового взаимодействий шестиволновый матричный элемент. Процедура расчета C существенно отличается

от таковой в [12, 13]: неопределенности вида 0/0, возникающие при учете перенормировок, оказываются конечными. Детали этих вычислений будут опубликованы позднее.

Таким образом, с учетом $H_{\text{int}} = \overline{H}^{(4)} + \overline{H}^{(6)}$ уравнение движения (9) преобразуется к виду

$$i\psi_t - \alpha\psi_{xx} - \mu|\psi|^2\psi - 4i\beta|\psi|^2\psi_x - 3C|\psi|^4\psi = 0, \quad (12)$$

где $\alpha = -\omega''_{kk}/2 \approx 0.156$, $\beta \approx -0.775$, $C \approx 4.277$. Помимо гамильтониана, полученное уравнение сохраняет полное число частиц $N = \int |\psi|^2 dx$ и импульс системы $P = \frac{i}{2} \int (\psi_x^*\psi - \psi_x\psi^*) dx$.

3. Слабонелинейная волна Стокса соответствует решению уравнения (12) вида

$$\psi = A \exp[-i\Omega t], \quad (13)$$

где между Ω и A имеет место соотношение

$$\Omega = \mu A^2 + 3CA^4. \quad (14)$$

Рассмотрим возмущенное решение уравнения (12),

$$\psi = A(1 + U(x, t)) \exp[i(-\Omega t + V(x, t))], \quad (15)$$

где U и V предполагаются малыми возмущениями. Подставляя (15) в (12), с учетом (14), и разделяя действительную и мнимую части, в линейном приближении по возмущению приходим к следующей системе уравнений:

$$U_t - 4\beta A^2 U_x - \alpha V_{xx} = 0, \quad (16)$$

$$V_t - 4\beta A^2 V_x + \alpha U_{xx} + 2A^2[\mu + 6CA^2]U = 0. \quad (17)$$

Решение системы (16), (17) может быть записано в виде

$$U = U_0 \exp[i(\bar{\kappa}x - \bar{\omega}t)] + \text{с.с.},$$

$$V = V_0 \exp[i(\bar{\kappa}x - \bar{\omega}t)] - \text{с.с.},$$

где $\bar{\omega}$ и $\bar{\kappa}$ связаны соотношением

$$\bar{\omega}/\bar{\kappa} = -4\beta A^2 \pm \sqrt{\alpha [\alpha \bar{\kappa}^2 - 2A^2(\mu + 6CA^2)]}.$$

Таким образом, при

$$\mu > -6CA^2 \quad (18)$$

существуют возмущения с волновыми числами $\bar{\kappa} < A\sqrt{2(\mu + 6CA^2)}/\alpha$, для которых $\bar{\omega}$ содержит положительную мнимую добавку, что означает неограниченный рост возмущения со временем по экспоненциальному закону. Максимум инкремента неустойчивости $\gamma_{\text{max}} = A^2(\mu + 6CA^2)$ при этом достигается для

$\bar{k} = A\sqrt{\frac{\mu+6CA^2}{\alpha}}$. В пересчете для волнового вектора k_0 соотношение (18) дает (сравните с [6])

$$k_0 > k_{cr} - \frac{6CA^2}{(\partial\mu/\partial k_0)|_{k_0=k_{cr}}} \approx 1.363 - 8.282A^2. \quad (19)$$

Таким образом, область устойчивости монохроматической волны в k -пространстве сужается с ростом ее амплитуды.

4. Уравнения движения (12) допускают солитонные решения. Действительно, подстановка анзаца $\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\lambda^2 t}$ приводит к уравнению на форму солитона

$$\alpha\psi_{xx} - \lambda^2\psi + \mu|\psi|^2\psi + 4i\beta|\psi|^2\psi_x + 3C|\psi|^4\psi = 0, \quad (20)$$

которое в свою очередь может быть преобразовано к системе уравнений на амплитуду и фазу $\psi = re^{i\phi}$:

$$\phi_x = -\frac{\beta}{\alpha}r^2, \quad (21)$$

$$\alpha r_{xx} - \lambda^2 r + \mu r^3 + 3C_1 r^5 = 0. \quad (22)$$

Здесь константа C перенормируется как $C_1 = C + \beta^2/\alpha$. Интегрируя (22) с помощью интеграла энергии (см., например, [14]), приходим к

$$r^2 = \frac{4\lambda^2}{\sqrt{16\lambda^2 C_1 + \mu^2 \operatorname{ch} \frac{2\lambda x}{\sqrt{\alpha}} + \mu}}, \quad (23)$$

$$\phi = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha C_1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{16\lambda^2 C_1 + \mu^2 e^{\frac{2\lambda x}{\sqrt{\alpha}} + \mu}}}{4\lambda\sqrt{C_1}}. \quad (24)$$

Ограниченные в x -пространстве решения уравнения (12) в виде солитонов могут существовать только при $\lambda^2 > 0$ (см. (22)). При $\lambda^2 \rightarrow 0$ в случае фокусирующей нелинейности $\mu > 0$ солитоны испытывают мягкую бифуркацию: амплитуда солитона (23) стремится к нулю как λ . В то же время, при $\lambda^2 \rightarrow 0$ и $\mu < 0$ решения (23), (24) вырождаются в солитон, затухающий степенным образом:

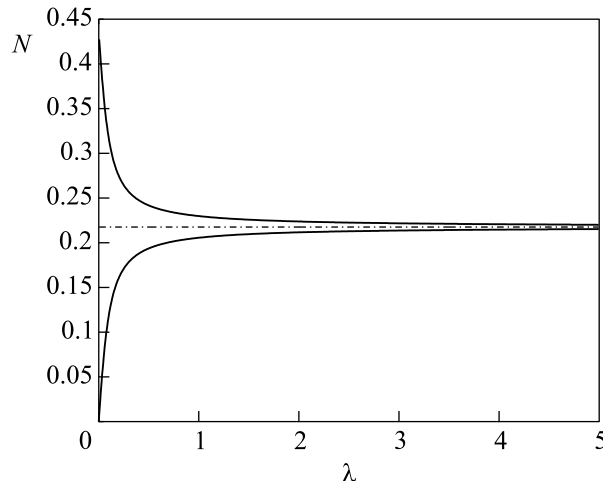
$$r_{alg}^2 = \frac{2|\mu|}{\frac{\mu^2}{\alpha}x^2 + 4C_1}, \quad \phi_{alg} = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha C_1}} \operatorname{arctg} \frac{|\mu|x}{2\sqrt{\alpha C_1}}.$$

Таким образом, в случае дефокусирующей нелинейности при переходе через $\lambda = 0$ солитон испытывает жесткую бифуркацию с максимальной амплитудой на скачке $A^2 = |\mu|/2C_1$. Для того чтобы получить сходимость разложения гамильтониана по степеням канонических переменных, необходимо, чтобы данный скачок был мал, что в пересчете на k_0 дает критерий применимости нашей теории $|k_0 - k_{cr}| \ll 2C_1/(\partial\mu/\partial k_0)|_{k_0=k_{cr}}$.

Полное число частиц N на солитонном решении,

$$N = 2\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{16\lambda^2 C_1 + \mu^2 + \mu}}{4\lambda\sqrt{C_1}} \right], \quad (25)$$

при $\mu < 0$ достигает своего максимума $N_{cr} = \pi\sqrt{\alpha/C_1}$ в точке $\lambda = 0$, уменьшаясь до $N_{cr}/2$ при $\lambda \rightarrow \infty$ (см. рисунок). В случае фокусирующей не-



Зависимость N от λ

линейности $\mu > 0$ число частиц N растет пропорционально λ от нуля и асимптотически приближается снизу к $N_{cr}/2$. Таким образом, производные $\partial N/\partial \lambda^2$ имеют разные знаки для различных μ : для фокусирующего случая производная положительна, для дефокусирующего – отрицательна. Последнее обстоятельство с помощью критерия Вахитова-Колоколова [15] может быть интерпретировано в качестве признака устойчивости нижней ветви солитонов $\mu > 0$ и неустойчивости верхней $\mu < 0$. Физический смысл данного критерия состоит в том, что если при добавлении частицы (увеличении N) энергия основного состояния $-\lambda^2$ растет, то соответствующее состояние является неустойчивым, и устойчивым в противном случае. Однако, строго говоря, критерий Вахитова-Колоколова выведен для НУШ и не может быть непосредственно применен к рассматриваемой системе.

Солитонные решения (23), (24) представляют собой стационарные точки энергии системы E при фиксированном числе частиц N ,

$$\delta(E + \lambda^2 N) = 0, \quad (26)$$

где энергия, представленная в терминах амплитуды и фазы, дается выражением (сравните с [12–14]):

$$E = \int \left[\alpha r_x^2 - \frac{\mu}{2} r^4 + r^2 \left(\phi_x + \frac{\beta}{\alpha} r^2 \right)^2 - C_1 r^6 \right] dx. \quad (27)$$

Для гамильтоновых систем стационарная точка будет устойчива по Ляпунову, если она реализует минимум или максимум какого-либо интеграла движения, что с учетом (26) означает, что для доказательства устойчивости солитонных решений необходимо показать ограниченность функционала энергии снизу.

Преобразование скейлинга $r = \frac{1}{\sqrt{a}} r_{\text{sol}}(\frac{x}{a})$, где r_{sol} – солитонное решение, будучи примененным к (27), превращает энергию в функцию параметра a :

$$E(a) = \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{a} \right) \frac{\mu}{2} \int r_{\text{sol}}^4 dx,$$

$$E_{\text{sol}}(a) = E(a = 1) = -\frac{\mu}{4} \int r_{\text{sol}}^4 dx.$$

Таким образом, в случае фокусирующей нелинейности $\mu > 0$ функция $E(a)$ ограничена снизу, и ее минимум соответствует солитонному решению $E_{\text{sol}} < 0$. Для $\mu < 0$ функция $E(a)$ не ограничена снизу при $a \rightarrow 0$, и ее максимум $E_{\text{sol}} > 0$ соответствует солитонному решению. В то же время, применение калибровочного преобразования $\psi = \psi_{\text{sol}} e^{i\xi}$ оставляет энергию ограниченной снизу как для фокусирующего, так и для дефокусирующего случаев. Таким образом, при $\mu < 0$ солитон представляет собой седловую точку функционала энергии и, следовательно, является неустойчивым относительно конечных возмущений.

Оказывается, что в фокусирующем случае семейство солитонов действительно реализует минимум энергии при фиксированном числе частиц N . Для доказательства этого утверждения можно оценить второй и четвертый интегралы в (27) как (см. [14])

$$\int r^6 dx \leq \left(\frac{N}{N_1} \right)^2 I_1, \quad \int r^4 dx \leq \frac{N^{3/2} I_1^{1/2}}{\sqrt{3}},$$

где $N_1 = \pi/2$, $I_1 = \int r_x^2 dx$, что в свою очередь приводит к оценке функционала энергии:

$$E \geq \left[\alpha - C_1 \left(\frac{N}{N_1} \right)^2 \right] I_1 - \frac{\mu}{2\sqrt{3}} N^{3/2} I_1^{1/2} \geq \quad (28)$$

$$\geq -\frac{\mu^2 N^3}{48 \left[\alpha - C_1 \left(\frac{N}{N_1} \right)^2 \right]},$$

верной для всех $N \leq \sqrt{\alpha/C_1} N_1 = N_{cr}/2$, то есть с учетом (25) для всех солитонов из нижнего $\mu > 0$ семейства решений.

В итоге, в слабонелинейном пределе для фокусирующей нелинейности $k_0 > k_{cr}$ солитоны огибающих существуют и являются устойчивыми как в рамках классического НУШ, так и в рамках уравнения (12). В дефокусирующем случае $k_0 < k_{cr}$ в границах применимости уравнения (12) $k_{cr} - k_0 \ll \ll 2C_1/(\partial\mu/\partial k_0)|_{k_0=k_{cr}}$ солитонные решения хотя и существуют, являются неустойчивыми относительно конечных возмущений.

5. Автор благодарит Е.А. Кузнецова и А.И. Дьяченко за полезные обсуждения, а также Ф. Диаса (F. Dias), которому принадлежит идея исследования данной системы. Работа автора была поддержана грантом NATO Linkage Grant EST.CLG.978941, Российским фондом фундаментальных исследований (гранты # 06-01-00665, # 07-01-92165), программой Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”, а также программой поддержки ведущих научных школ РАН.

1. Т. В. Benjamin and J. E. Feir, J. Fluid Mech. **27**, 417 (1967).
2. В. Е. Захаров, ПМТФ **9**, 86 (1968).
3. G. B. Whitham, Proc. R. Soc. Lond. A **283**, 238 (1965).
4. G. B. Whitham, J. Fluid Mech. **22**, 273 (1965).
5. Н. Hasimoto and Н. Ono, J. phys. Soc. Japan **33**, 805 (1972).
6. R. S. Johnson, Proc. R. Soc. Lond. A **357**, 131 (1977).
7. К. В. Dysthe, Proc. R. Soc. Lond. A **369**, 105 (1979).
8. Е. А. Кузнецов, П. М. Лушников, ЖЭТФ **108**, 614 (1995).
9. V. E. Zakharov, in *Handbook of Plasma Physics*, Vol. 2, *Basic Plasma Physics*, Eds. A. A. Galeev, R. N. Sudan, Elsevier, North-Holland, 1984, pp. 3-36.
10. A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM, Philadelphia, 1985.
11. F. Dias and E. A. Kuznetsov, Phys. Letters A **263**, 98 (1999).
12. D. S. Agafontsev, F. Dias, and E. A. Kuznetsov, JETP Letters **83**, 241 (2006).
13. D. S. Agafontsev, F. Dias, and E. A. Kuznetsov, Physica D **225**, 153 (2007).
14. Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **116**, 299 (1999).
15. И. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, Известия вузов, Радиофизика **16**, 1020 (1973).