Письма в ЖЭТФ, том 87, вып. 9, с. 592 – 596 © 2008 г. 10 мая

Численное моделирование реализаций и спектры квазимультифрактального диффузионного процесса

А. И. Саичев[1)], *В. А. Филимонов*[1)]

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 11 февраля 2008 г.

После переработки 25 марта 2008 г.

Построена дискретная модель диффузионного квазимультифрактального процесса и предложен новый метод расчета квазимультифрактального спектра при помощи статистической обработки реализаций процесса. Данный метод позволяет получить практически непрерывный спектр процесса, что невозможно при помощи традиционных аналитических способов. На основании результатов численных экспериментов выделены три существенно различные области параметров: области "монофрактальности", "умеренной" и "сильной" мультифрактальности. Предложенная модель позволяет лучше осмыслить механизмы мультифрактальных явлений в сильной турбулентности и в стохастическом поведении финансовых рынков.

PACS: 02.50.–r, 05.40.–a, 05.45.Df, 47.53.+n

Изучение мультифрактальных процессов, являющихся обобщением каскадных моделей Ричардсона [1] и Колмогорова [2], началось сравнительно недавно. Основное развитие данная область теории случайных процессов получила в рамках исследования турбулентности, и в настоящее время, после того как было показано, что приращения скорости в развитой турбулентности имеют мультифрактальный характер [3], интерес к изучению мультифрактальных свойств турбулентности сильно возрос (см., например, [4 – 9]). Не менее важной областью применения мультифрактальных процессов служит теория финансовых рынков, где мультифрактальные процессы адекватно описывают стохастический процесс котировок ценных бумаг [10, 11].

Ключевым вопросом теории мультифрактальности является разработка адекватной модели подобных процессов. Первые попытки (1990–1997 г.) создать такую модель основывались на каскадном правиле [4, 12, 13] для приращений рассматриваемого процесса. Однако данный подход имел ряд существенных недостатков, таких как нестационарность приращений и отсутствие явной зависимости от времени. Более удачной стала предложенная в 2000 г. модель мультифрактальных случайных блужданий [14, 15]. Данная модель, хотя и лишена недостатков предыдущих, теряет смысл для моментов приращений высоких порядков.

На наш взгляд, наиболее адекватно отражающей свойства мультифрактальных процессов стала квазимультифрактальная модель [16, 17], предложенная в 2006 г. Являясь развитием модели случайных блужданий, она вводит в употребление несколько дополнительных существенных параметров, что позволяет избежать недостатков предыдущей модели. Данная работа посвящена изучению свойств диффузионного квазимультифрактального процесса с помощью численного моделирования его реализаций.

Аналитический метод расчета, используемый в [16, 17], позволяет рассчитать квазимультифрактальный спектр процесса лишь для целых значений степеней моментов. В то же время численное моделирование процесса и нахождение спектра при помощи статистической обработки реализаций мультифрактального процесса, предложенные в данной работе, позволяют получить практически непрерывный квазимультифрактальный спектр. При этом мультифрактальные свойства процесса, описанные со "спектральной" точки зрения, наглядным образом подтверждаются видом реализаций процесса.

Следуя предложенной нами модели [16, 17], представим дискретный диффузионный квазимультифрактальный процесс X_n в виде

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i e^{\omega_i} \ , \qquad \omega_i = \rho \sum_{j=0}^{i} \mu_j \cdot \left(i - j + 1\right)^{-\varphi - \frac{1}{2}} \ , \tag{1}$$

где ξ_i и μ_i — некоррелированные гауссовы величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, ρ — ключевой параметр мультифрактальности,

[1)]e-mail: saichev@hotmal.ru; vladimir.a.filimonov@gmail.com

а φ — параметр, определяющий скорость спадания ядра процесса $\left(i-j+1\right)^{-\varphi-\frac{1}{2}}$. Параметр ρ следующим образом связан с параметром σ^2 непрерывной квазимультифрактальной модели [17]:

$$\rho^2 = \frac{1}{2}\varphi\sigma^2 \ . \tag{2}$$

В численном эксперименте для получения величин ξ_i и μ_i использовался генератор псевдослучайных чисел "Вихрь Мерсенна" [18], достоинствами которого, кроме малого коэффициента корреляции и высокой степени равномерности распределения, являются также высокая скорость работы и огромный период, равный $2^{19937}-1$.

Отметим, что обсуждаемая в [14, 15] модель соответствует предельному случаю $\varphi = 0$. При этом параметр σ^2 оказывается бесконечным, что и приводит к отсутствию моментов приращений высоких порядков в модели мультифрактальных случайных блужданий. Введение малого параметра φ и, соответственно, ограничение σ^2, не только не разрушает мультифрактальных свойств моделируемого процесса, но напротив, делает квазимультифрактальную модель более богатой и адекватной реальным свойствам развитой турбулентности [17].

Обсудим реализации получаемого дискретного процесса. Очевидно, что при малых значениях параметра ρ процесс X_n будет практически монофрактальным (рис.1), а в пределе при $\rho \to 0$ становится винеровским процессом. С ростом ρ мультифрактальные свойства процесса начинают проявляться сильнее. Внешне это проявляется в появлении большого числа быстрых "скачков" (рис.2), характерных, в частности, для котировок на фондовых рынках.

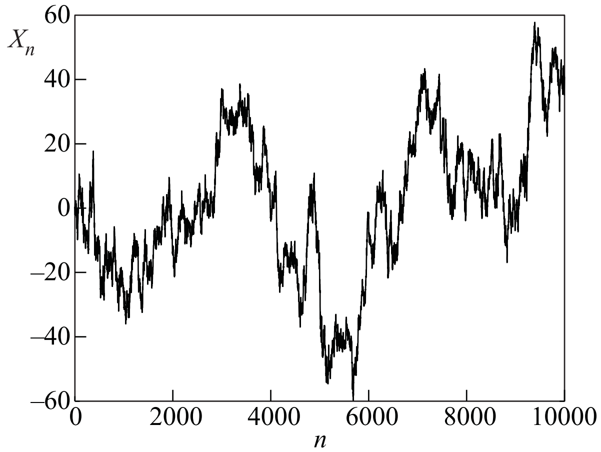

Рис.1. Реализация диффузионного квазимультифрактального процесса X_n при $\varphi = 0.01$, $\rho = 0.1$

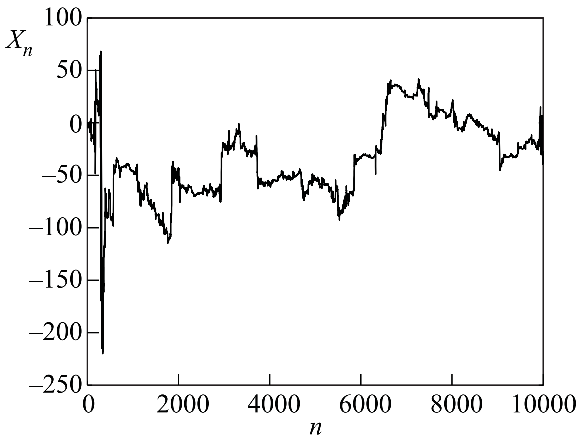

Рис.2. Реализация диффузионного квазимультифрактального процесса X_n при $\varphi = 0.01$, $\rho = 0.5$

При еще большем увеличении ρ возрастает влияние экспоненты в (1), а вместе с тем растет и амплитуда скачков, и при больших значениях ρ процесс X_n можно рассматривать как некоторый обобщенный телеграфный процесс (рис.3).

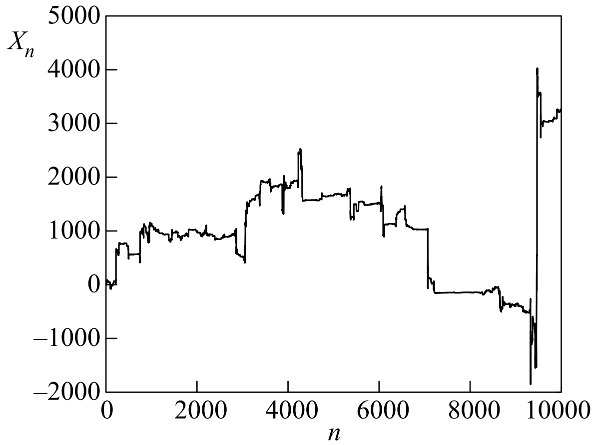

Рис.3. Реализация диффузионного квазимультифрактального процесса X_n при $\varphi = 0.01$, $\rho = 0.9$

Как уже было сказано, процесс мультифрактальных случайных блужданий [14] может рассматриваться как предельный случай квазимультифрактального случайного процесса. Покажем это, положив $\varphi = 10^{-25}$, что даже с точки зрения аналитического исследования может рассматриваться как бесконечно малое. Рис.4 иллюстрирует хорошее визуальное согласие реализации процесса мультифрактальных случайных блужданий (график, приведенный в работе [14], рис.4b) и соответствующей ему реализации квазимультифрактального процесса (1) (рис.4a). Отметим также, что значения параметров, рассмотренные в [14, 15], соответствуют $\rho \lesssim 0.4$, то есть об-

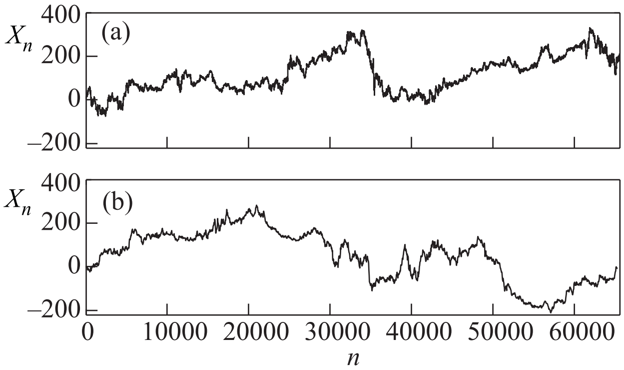

Рис.4. Реализации (a) квазимультифрактального диффузионного процесса при $\varphi = 10^{-25}$, $\rho = 0.21$ и (b) процесса мультифрактальных случайных блужданий при $\lambda^2 = 0.03$ [14]

ласти, в которой мультифрактальные свойства процесса слабо выражены.

Реализации дискретного процесса X_n позволяют рассчитать приращения $\delta_m X_n = X_{n+m} - X_n$, а усреднение приращений $\delta_m X_n$ по длине реализации позволяет найти соответствующие моменты:

$$M_q(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m} \left|\delta_m X_n\right|^q \,, \tag{3}$$

где N — длина полученной реализации, а q — произвольный порядок момента. Очевидно, что для выполнения "качественного" усреднения сумма в последнем выражении должна содержать достаточно много слагаемых, поэтому при заданной длине реализации N (ограничиваемой объемом оперативной памяти компьютера) максимальный масштаб m, на котором результат усреднения (3) будет достоверным, удовлетворяет следующему неравенству: $m \ll N$. Расчеты показывают, что для достоверности усреднения достаточно выполнения: $N/m > 100 - 250$.

По аналогии с непрерывным случаем введем понятие квазимультифрактального процесса. Если существует некоторая область масштабов

$$m_\tau \ll m \ll m_L, \tag{4}$$

на которой зависимость момента приращений $M_q(m)$ от масштаба m можно аппроксимировать (например, при помощи метода наименьших квадратов) чисто степенной зависимостью

$$\tilde{M}_q(m) = K_q m^{\tilde{\zeta}_q}, \tag{5}$$

а $\tilde{\zeta}_q$ является нелинейной функцией порядка момента q, то назовем исходный процесс обладающим *квазимультифрактальными свойствами*. Величины $\tilde{\zeta}_q$ при этом назовем *эффективными масштабными показателями*, а *квазимультифрактальным спектром процесса* назовем зависимость $\tilde{\zeta}_q$ от порядка момента q. По аналогии с теорией турбулентности сам интервал (4) назовем *инерционным*, а масштабы m_τ и m_L – *масштабом вязкости* и *интегральным масштабом*, соответственно. На рис.5 показан пример ап-

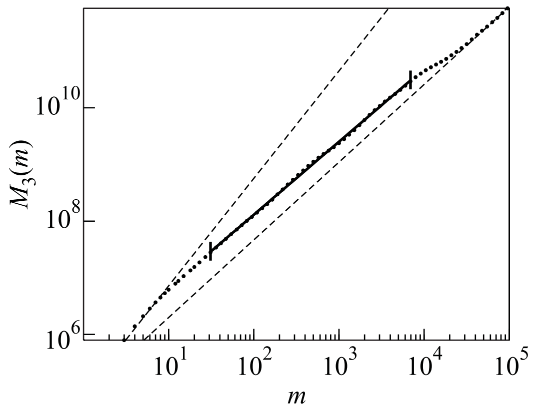

Рис.5. График момента $M_3(m)$ приращений процесса X_n при $\varphi = 0.01$, $\rho = 0.5$. Точками показаны результаты численного эксперимента, штриховыми линиями – монофрактальные асимптоты, а сплошной жирной линией – аппроксимация графика момента чисто степенной зависимостью (5) на инерционном интервале

проксимации графика момента $M_3(m)$ зависимостью (5). В данной работе при анализе реализаций длиной $N = 10^7$ (что соответствует оперативной памяти компьютера, равной 1Gb) и порядков моментов $0 < q \leq 2.5$ инерционный интервал (4) имеет следующие границы: $m_\tau \sim 10$, $m_L \sim 5 \cdot 10^4$.

Отметим, что при аналитическом рассмотрении [17] расчет квазимультифрактального спектра процесса $\tilde{\zeta}_q$ возможен лишь в дискретном наборе точек $q = 2, 4, 6, \ldots$ Значение же $\tilde{\zeta}_q$ для промежуточных (нецелых) степеней q может быть рассчитано исключительно при помощи интерполяции полученных значений. В то же время численное моделирование квазимультифрактального процесса X_n и нахождение моментов приращений процесса непосредственно из реализации последнего позволяет найти значение эффективного показателя $\tilde{\zeta}_q$ для произвольного значения q (не ограничиваясь только целыми значениями) и, таким образом, получить практически непрерывный квазимультифрактальный спектр.

На рис.6 показаны квазимультифрактальные спектры, рассчитанные для десяти реализаций процесса X_n при $\varphi = 0.01$, $\rho = 0.1$ (рис.6a) и при $\varphi = 0.01$, $\rho = 0.9$ (рис.6b). Несмотря на то, что характер поведения спектров реализаций, соответ-

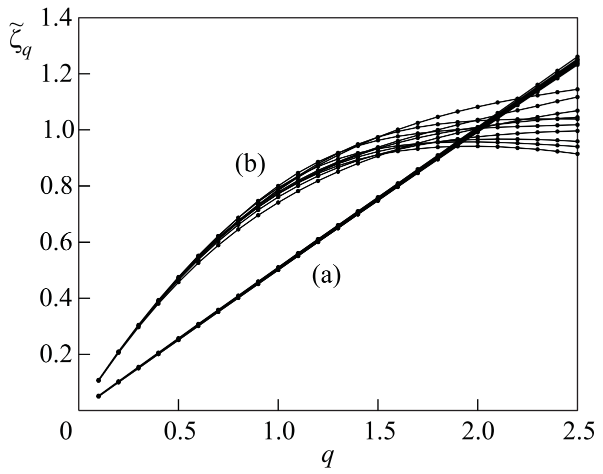

Рис.6. Графики квазимультифрактальных спектров десяти реализаций процесса X_n при (a) $\varphi = 0.01,\ \rho = 0.1$ и (b) $\varphi = 0.01,\ \rho = 0.9$

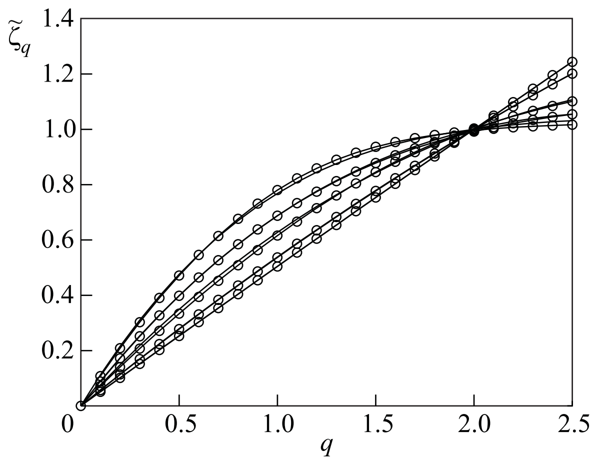

Рис.7. Графики квазимультифрактальных спектров процесса X_n при (снизу вверх) $\varphi = 0.01$, $\rho = 0.1$, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9. Кружки, соединенные тонкой линией, соответствуют результатам численного эксперимента, жирные линии – аппроксимациям результатов аналитических расчетов

ствующих одним и тем же параметрам, одинаков, на рисунках виден некоторый разброс кривых, причиной которому является специфика метода статистических испытаний. Очевидно, наиболее приближенной к кривой, получаемой строгими аналитическими методами, будет некоторая средняя кривая, а количественной оценкой "ошибки", получаемой при моделировании, может служить их относительная разность. Результаты расчетов показывают малое значение указанной разности, даже для $\rho \simeq 1$ не превышающее 9%.

Окончательный ответ о достоверности получаемых результатов может дать сравнение результатов численного счета и аналитических вычислений. Для используемых значений $\varphi = 0.01$ и $\rho = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ выражение (2) позволяет рассчитать соответствующие значения параметра непрерывной модели: $\sigma^2 = 2, 18, 50, 98, 162$. Спектр, полученный аналитически в дискретном наборе точек $q = 2, 4, 6, 8, 10$, в промежуточных точках интерполировался.

На рис.7 показаны наложенные друг на друга результаты интерполяции аналитически рассчитанного спектра (жирная линия) и усредненный по 10 реализациям спектр ζ_q^{avg}, полученный с помощью численного моделирования (белые кружки, соединенные тонкой линией). Видно, что сравнение показывает хорошее согласие аналитических и экспериментальных результатов. При этом, учитывая различие в методике определения эффективных показателей (в аналитическом расчете эффективный показатель был введен как глобальный минимум локального [17], а в численном эксперименте – как результат аппроксимации момента приращений выражением (5)), можно достоверно говорить о том, что нелинейный спектр является именно следствием квазимультифрактальной природы процесса, а не статистической обработки моментов приращений.

Проведенные численные эксперименты показывают существенную нелинейность спектров (рис.7, кружки, соединенные тонкой линией), что говорит о наличии значительных мультифрактальных свойств моделируемого процесса. Видно, что спектры процесса подтверждают выводы, основанные на реализациях процесса X_n, о наличии трех существенно различных областей параметров процесса. Первая, *"монофрактальная" область* (или *область "слабой" мультифрактальности*), с малым значением параметра $\rho \lesssim 0.1$, отвечает почти линейному спектру (нижняя кривая на рис.7) и практически монофрактальному процессу (рис.1). С ростом ρ отличия спектра от линейного становятся все существеннее, и при больших значениях ρ спектр становится сильно нелинейным. При этом в области существенной нелинейности спектра ($\rho \gtrsim 0.3$) также можно выделить две подобласти. В случае *"умеренной" мультифрактальности* ($\rho \sim 0.5$) спектр (например, средняя кривая на рис.7) довольно хорошо описывается квадратичной зависимостью

$$\tilde{\zeta}_q = (q - q(q-2)\lambda^2)/2, \tag{6}$$

полученной в модели мультифрактальных случайных блужданий [14, 15]. В области же *"сильной" мультифрактальности* ($\rho \gtrsim 0.9$), в которой реализации процесса состоят преимущественно из скачков и незначительных колебаний вокруг некоторых постоянных уровней (рис.3), отличия спектра от квадратичного весьма существенны (верхняя кривая на рис.7). Так, с ростом параметра ρ с 0.5 до 0.9 среднеквадратичное отклонение при аппроксимации спектра параболой (6) увеличивается в 200 раз.

Отметим, что хотя предложенная нами в виде (1), (где ξ_i – гауссова величина) модель описывает мультифрактальные свойства гидродинамической турбулентности лишь полукачественно, она допускает модификации, позволяющие получить строгое согласие с феноменологической теорией турбулентности. Так, при замене в (1) белого шума ξ_i на приращение фрактального броуновского движения с масштабным показателем $H = 1/3$ спектр "умеренно-мультифрактального" режима совпадет с хорошо известным спектром приращений скорости в турбулентном потоке:

$$\tilde{\zeta}_q = (q - q(q - 3\lambda^2)/3.$$

В предложенной же форме квазимультифрактальная модель, вслед за моделью мультифрактальных случайных блужданий [14, 15], хорошо описывает динамику финансовых рынков, где известно [11], что второй момент приращений котировок растет по классическому линейному закону (6). Однако отметим, что охватываемый квазимультифрактальной моделью класс процессов существенно шире, так как в отличие от модели [14, 15] включает в себя процессы с сильно выраженными мультифрактальными свойствами (не описываемые параболическим спектром). При этом метод численного моделирования, предложенный в данной работе, позволяет детально исследовать свойства мультифрактальности, которые в принципе невозможно изучать аналитически.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 06-02-16414а), а также в рамках программы по поддержке ведущих Научных Школ (грант # НШ-1055.2008.2).

1. L. F. Richardson *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge University Press, 1922.
2. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР XXXI, 99 (1941).
3. U. Frish, *Turbulence, The Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995.
4. R. Friedrich and J. Peinke, Phys. Rev. Lett. **78**, 863 (1997).
5. M. Alber, S. Lueck, C. Renner et al., E-print archives, nlin/0007014 (1998).
6. V. Yakhota and K. R. Sreenivasan, Physica A **343**, 147 (2004).
7. L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 064502 (2004).
8. U. Frisch, M. M. Afonso, A. Mazzino et al., J. of Fluid Mechanics **542**, 97 (2005).
9. L. Chevillard, B. Castaing, E. Leveque et al., Physica D **218**, 77 (2006).
10. B. Pochart and J.-P. Bouchaud, Quantitative Finance **2**, 303 (2002).
11. L. Borland, J.-P. Bouchaud, J.-F. Muzy, and G. Zumbach, E-print archives, cond-mat/0501292 (2005).
12. E. A. Novikov, Phys. Fluids A **2**, 814 (1990).
13. B. Castaing, Y. Gagne, and E. Hopfinger, Phisica D **46**, 177 (1990).
14. E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy, Phys. Rev. E **64** 026103 (2001).
15. E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy, E-print archives, cond-mat/0009260 (2000).
16. A. Saichev and D. Sornette, Phys. Rev. E **74**, 011111-1 (2006).
17. А. И. Саичев, В. А. Филимонов, ЖЭТФ **132**, 1235 (2007).
18. M. Matsumoto and T. Nishimura, ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation **8**, 3 (1998).