

О СОЛИТОННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*В.Е.Захаров, А.Н.Пушкарёв, В.Ф.Швец,
В.В.Яньков*

Предлагается качественная картина сильной волновой турбулентности в условиях, когда отсутствуют волновые коллапсы. Центральную роль в механизме турбулентности играют процессы, приводящие к увеличению амплитуд солитонов при уменьшении их числа. В консервативных неинтегрируемых системах солитон является статистическим аттрактором. Описанная картина подтверждается прямым численным моделированием.

1. В настоящее время не вызывает сомнения, что развитие сильной турбулентности в различных физических ситуациях сопровождается образованием пространственно-временных структур, описание которых следует проводить в координатном пространстве. Достаточно универсальной моделью волновой турбулентности является нелинейное уравнение Шредингера (см., например, ¹⁻³).

$$i\psi_t + \Delta\psi + f(|\psi|^2)\psi = 0. \tag{1}$$

При $f(u) > 0$ и $f'(u) > cu^{(2-d)/d}$ (d – размерность пространства) структуры, описываемые (1) – это волновые коллапсы, теория которых в настоящее время интенсивно развивается (см. ⁴⁻⁶ и приведенную там литературу). Уравнение (1) имеет решение солитонного типа

$$\psi(\mathbf{r}, t) = g(\lambda, \vec{\xi}) \exp \left[\frac{i}{2}(\mathbf{v}\mathbf{r}) + i\left(\lambda^2 - \frac{v^2}{4}\right)t \right], \quad \vec{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t,$$

где функция g является решением уравнения

$$\Delta g + f(g^2)g - \lambda^2 g = 0, \quad \nabla g|_{\xi=0} = 0, \quad g \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty. \tag{2}$$

В "коллапсном" случае солитон неустойчив и в турбулентных процессах не реализуется. Напротив, при условии устойчивости солитона (имеющем для степенной нелинейности $f(u) = u^{s/2}$ вид $sd < 4$ ¹⁻³) в турбулентности, описываемой уравнением (1) солитоны должны играть основную роль, т. е. турбулентность должна быть "солитонной" ⁷. Представляет принципиальный физический интерес вопрос о характере этой турбулентности. Уравнение (1) имеет интегралы движения

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}, \quad H = \int [|\nabla\psi|^2 - \phi(|\psi|^2)] d\mathbf{r} \quad (\phi'(u) = f(u)). \tag{3}$$

В пренебрежении квантовыми эффектами тенденция к равномерному распределению энергии по степеням свободы приводит к тому, что интеграл H (гамильтониан) сосредоточивается в области коротких волн. При этом в системе мог бы сформироваться конденсат – однородное поле, сопровождающееся мелкомасштабными флуктуациями. Но при $f'(u) > 0$ конденсат неустойчив и в отсутствие коллапса распадается на солитоны. В специальном интегрируемом случае $f(u) = cu$, $c > 0$ солитоны рассеиваются друг на друге упруго, и их число сохраняется. В общем неинтегрируемом случае термодинамически выгодно слияние солитонов ^{2, 8}. При слиянии высвобождается некоторое количество интеграла H , которое уносится свободными волнами, интеграл числа квазичастиц N в основном остается в солитоне. Размер солитона при этом уменьшается. Таким образом, при решении задачи об эволюции заданного начального распределения солитон оказывается своеобразным статистическим аттрактором –

состояние асимптотически по времени распадается на солитон и совокупность слабонелинейных волн.

2. С целью прямого доказательства этого вывода мы проводили численное интегрирование одномерного уравнения (1) на больших временах эволюции при различных нелинейностях $f(u)$. Задача решалась на фиксированном отрезке $0 \leq x \leq L$ с периодическими граничными и возмущенными однородными начальными условиями

$$\psi(x, 0) = \psi_0 \left(1 + \epsilon \sin \frac{2\pi}{L} x \sin \frac{\pi\alpha}{2} x \right), \quad \epsilon \ll 1, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1. \quad (4)$$

В рамках (1) инкремент модуляционной неустойчивости конденсата $\psi_0 \exp[i f(|\psi_0|^2)]$ определяется выражением

$$\gamma(k) = k \sqrt{2A - k^2}, \quad A = \left(u \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{u = |\psi_0|^2}. \quad (5)$$

Он максимален при $k = \sqrt{A}$ и равен $\gamma_{max} = A$. Соответствующая модуляционная длина $\lambda_{mod} = 2\pi/\sqrt{A}$ определяет число сформировавшихся при $t > \gamma_{max}^{-1}$ солитонов $n \approx L/\lambda_{mod}$.

В случае

в случае степенной нелинейности $f(u) = u^{s/2}$ решение уравнения (2) имеет при $d = 1$ вид

$$g(\xi) = \left(\lambda \sqrt{1 + \frac{s}{2}} / \operatorname{ch} \frac{\lambda s}{2} \xi \right)^{2/s}. \quad (6)$$

На этом решении

$$N = \frac{2\sqrt{\pi}}{s} \left(1 + \frac{s}{2} \right)^{2/s} \frac{\Gamma(2/s)}{\Gamma(2/s + 1/2)} \lambda^{(4-s)/s}, \quad H = N \left(\frac{v^2}{4} - \lambda^2 \frac{4-s}{4+s} \right). \quad (7)$$

Моделирование является адекватным, если

$$\lambda_{mod} \ll L \ll M \lambda^{-1}, \quad (8)$$

где M — число точек на отрезке интегрирования, $\lambda^{-1} \sim N^{s/(4-s)}$ — характерный размер асимптотического солитона. Это довольно жесткое условие на параметры численной модели и начального состояния (4) в наших расчетах всегда выполнялось. Расчеты проводились на многопроцессорном комплексе ЕС-1037-ЕС-2706 ИКИ АН СССР. Интегрирование уравнения (1) осуществлялось с использованием алгоритмов БПФ по методике, аналогичной ⁹. Для контроля использовались интегралы движения (3). Помимо степенной нелинейности рассматривались системы с насыщением типа $f(u) = u/(1-au)$ и $f(u) = u(1+b_1u)/(1+b_2u)$.

Результаты расчетов продемонстрировали полное соответствие наблюдаемой пространственно-временной динамики системы предсказанной выше качественной картине солитонной турбулентности. На рис. 1 представлены результаты для $f(u) = \sqrt{u}$. В результате развития модуляционной неустойчивости формируется решетка солитонов с периодом порядка λ_{mod} (рис. 1а). В процессе дальнейшей эволюции система все лучше разделяется на солитоны и слабонелинейные свободные волны. Взаимодействие солитонов друг с другом и со свободными волнами приводит к постепенной перекачке волн из слабых солитонов в более интенсивные, что ведет к увеличению амплитуд солитонов при уменьшении их числа (рис. 1б). На больших временах система приходит к единственному солитону малого размера и большой амплитуды (рис. 1в). Измеренная скорость солитона v много меньше групповой ско-

рости $(\partial \omega / \partial k)_k = \lambda$, что вполне естественно: неподвижный солитон реализует минимум энергии. Форма асимптотического солитона адекватно описывается точным решением (6), в котором λ вычислена из измеренной амплитуды. На свободные волны приходится порядка 15 – 20 % исходного интеграла N .

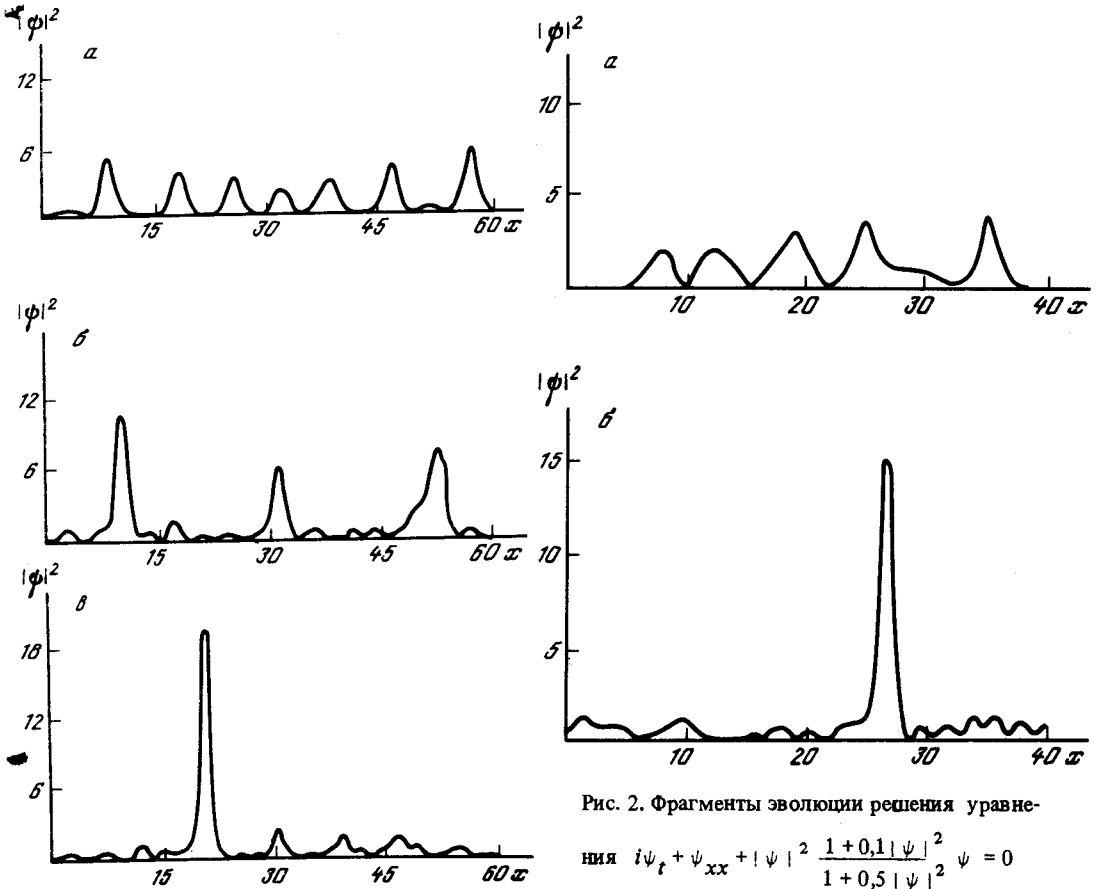


Рис. 2. Фрагменты эволюции решения уравнения $i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2 \psi = 0$ с параметрами начального условия $\psi_0 = 1, L = 40$: $a - t = 52,2$; $б - t = 765,4$

Рис. 1. Фрагменты эволюции решения уравнения $i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2 \psi = 0$ с параметрами начального условия $\psi_0 = 1, L = 60$: $a - t = 17,4$; $б - t = 365,4$; $в - t = 730,8$

Аналогичные результаты получены и при других видах нелинейности. Так, рис. 2 соответствует нелинейности $f(u) = u \frac{1+0,1u}{1+0,5u}$; качественная картина эволюции турбулентности совпадает с описанной выше.

3. Итак, в процессе эволюции долгоживущей солитонной турбулентности неинтегрируемая система притягивается к солитонному решению, что позволяет объявить солитон статистическим аттрактором. В реальных достаточно протяженных системах с диссипацией амплитуда солитона будет расти, а характерный размер уменьшаться вплоть до включения мелкомасштабного затухания. Это означает, что солитонная волновая турбулентность качественно сходна с турбулентностью, в которой энергия переносится коллапсирующими кавернами.

Литература

1. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M. Preprint № 199 I AE SB Ac. Sci. USSR, Novosibirsk, 1983.
 Петвиашвили В.И., Яньков В.В. Солитоны и турбулентность. В сб.: Вопросы теории плазмы, М.: Энергоатомиздат, 1985, вып. 14.

3. *Rasmussen J.J., Rypdal K.* Physica Scripta, 1986, **33**, 481.
4. *Rypdal K., Rasmussen J.J.* Physica Scripta, 1986, **33**, 498.
5. *Захаров В.Е., Швец В.Ф.* Письма в ЖЭТФ, 1988, **47**, 227.
6. *Kosmatov N.E., Petrov I.V., Shvets V.E., Zakharov V.E.* Preprint SRI Ac. Sci. USSR № 1365, Moscow, 1988.
7. *Kingsep A.S., Rudakov L.I., Sudan R.N.* Phys. Rev. Lett., 1973, **31**, 1482.
8. *Крылов С.Ф., Яньков В.В.* ЖЭТФ, 1980, **79**, 82.
9. *Барышев М.Ю., Юнаковский А.Д.* Препринт № 105 ИПФ АН СССР, Горький, 1984.

Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика"
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18 мая 1988 г.