Письма в ЖЭТФ, том 88, вып. 3, с. 194 – 197

Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости

В. М. Журавлев[1], *Д. А. Зиновьев*

Ульяновский государственный университет, 432970 Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 19 мая 2008 г.

После переработки 9 июня 2008 г.

Рассмотрено расширение метода интегрирования нелинейных уравнений с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа на случай размерности 1+2. На основе развитого подхода проводится анализ общей структуры решений уравнений Эйлера двумерных течений сжимаемой жидкости. Строится метод построения новых точных решений двумерных течений сжимаемой и не сжимаемой жидкости.

PACS: 02.30.Ik, 47.20.Ky, 47.40.–x

1. В недавних работах [1, 2] на основе использования результатов работы [3] был найден эффективный способ перечисления всех нелинейных эволюционных уравнений в частных производных размерности 1+1, которые интегрируются с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа. Этот подход известен изначально как метод интегрирования уравнения Бюргерса [4, 5] и некоторого более широкого класса уравнений, исследованных, например, в [6]. В настоящее время классы уравнений, интегрируемые с помощью такого рода подстановок, называются уравнениями типа Бюргерса [7, 8]. Достаточно полный обзор работ в этой области можно найти в [9]. Основным результатом работы [2] было применение развитого метода к задачам интегрирования уравнений одномерного течения сжимаемой жидкости как в случае идеальной жидкости, так и в случае наличия у нее вязкости. В настоящей работе предлагается нетривиальное обобщение развитого в [1, 2] подхода на случай размерности 1+2. До этого метод подстановок Коула-Хопфа не использовался в размерности 1+2 и выше, по крайней мере как систематический метод. Это позволяет отыскивать новые классы точно интегрируемых нелинейных уравнений в этой размерности. Основной целью данной работы является применение развитого подхода к задаче интегрирований двумерных уравнений Эйлера сжимаемой жидкости.

2. Для построения решений двумерных уравнений Эйлера полезно [10] перейти в комплексные координаты $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right], \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right].$$

Следуя общим соображениям работы [2], рассмотрим пару уравнений, описывающих перенос изолиний некоторой функции $T = T(z,\bar{z},t)$ в двумерном пространстве:

$$T_t + WT_z = 0, \quad T_t + \overline{W}T_{\bar{z}} = 0, \tag{1}$$

где $W = W(z,\bar{z},t)$ – комплексная скорость этого переноса. Дополним эту систему еще одним формальным соотношением:

$$T_{tt} = Q(z,\bar{z},t)T_t. \tag{2}$$

Совокупность этих соотношений позволяет выразить все высшие производные функции T по переменным $z,\bar{z},t$ только через одну производную, например, T_t. Совокупность вторых производных, которые далее будут называться базовыми, имеет следующий вид:

$$T_z = -\frac{1}{W}T_t, \quad T_{z\bar{z}} = RT_t, \quad T_{zt} = PT_t, \tag{3}$$

$$T_{zz} = \frac{1}{W^3}\left[WW_z - W_t + QW\right]T_t. \tag{4}$$

Здесь

$$P = \frac{1}{W^2}\left[W_t - QW\right], \tag{5}$$

$$R = \frac{1}{|W|^4}\left[\overline{W}^2 W_{\bar{z}} - W\overline{W}_t + Q|\overline{W}|^2\right] = $$
$$= \frac{1}{|W|^4}\left[W^2\overline{W}_z - \overline{W}W_t + Q|\overline{W}|^2\right]. \tag{6}$$

Отметим, что R, как и Q являются вещественными функциями. Для каждого из уравнений (3) выполняется и комплексно сопряженное уравнение. Из последних двух соотношений следует условие совместности:

$$\overline{W}^2 W_{\bar{z}} - W\overline{W}_t = W^2\overline{W}_z - \overline{W}W_t. \tag{7}$$

[1] e-mail: zhvictorm@mail.ru

Еще два условия совместности следуют из сравнения производных третьего порядка. Именно, полагая $T_{ttz} = T_{tzt}$ и используя (3), находим:

$$Q_z = P_t, \quad Q_{\bar{z}} = \overline{\mathrm{P}}_t, \tag{8}$$

где Q определяется в (2). Аналогично, из равенства $T_{zt\bar{z}} = T_{z\bar{z}t}$ находим еще одну пару структурных соотношений:

$$R_t - P_{\bar{z}} = P\overline{\mathrm{P}} - RQ, \quad R_t - \overline{\mathrm{P}}_z = P\overline{\mathrm{P}} - RQ. \tag{9}$$

Отсюда в силу вещественности Q и R сразу следует еще один закон сохранения:

$$P_{\bar{z}} = \overline{\mathrm{P}}_z. \tag{10}$$

В то же время, функция Q связана с P, R и W следующим образом:

$$Q = -PW + \frac{W_t}{W} = -\overline{\mathrm{PW}} + \frac{\overline{\mathrm{W}}_t}{\overline{\mathrm{W}}}, \tag{11}$$

$$P = -R\overline{\mathrm{W}} + \frac{\overline{\mathrm{W}}_z}{\overline{\mathrm{W}}}, \quad \overline{\mathrm{P}} = -RW + \frac{W_{\bar{z}}}{W}. \tag{12}$$

Используя (11) и (8), соотношения (9) можно привести к следующим эквивалентным уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(RW\Big) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(PW\Big), \; \frac{\partial}{\partial t}\Big(R\overline{\mathrm{W}}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\overline{\mathrm{PW}}\Big). \tag{13}$$

Эти соотношения являются прямым эквивалентом уравнений в размерности 1+1, которые использовались в [2] для построения решений одномерных течений сжимаемой жидкости. Их теперь можно использовать для выяснения структуры решений уравнений двумерных течений сжимаемой жидкости.

3. Совокупность полученных соотношений выполняется при произвольной вещественной функции T. Это само по себе уже дает некоторые модели гидродинамического типа. Выражая из (9) функцию Q и подставляя ее в соотношение (8), приходим к следующему уравнению:

$$P_t = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{R_t}{R} + \frac{1}{R}\Big(P_{\bar{z}} + P\overline{\mathrm{P}}\Big)\right]. \tag{14}$$

Это уравнение переходит в уравнение квазипотенциального течения сжимаемой жидкости, если положить, что комплексная скорость течения $S = u - iv$, где u и v – компоненты скорости течения по декартовым осям x, y, связана с P и R следующим образом:

$$S = -P/R = W - W_{\bar{z}}/WR = u - iv, \tag{15}$$

а функция R отождествляется с плотностью жидкости ρ:$\rho \equiv R$. В этом случае комплексное уравнение (14) сводится к двум вещественным уравнениям:

$$2\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\Big(u^2+v^2\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\ln\rho\right) - \frac{1}{2}\Delta u =$$
$$= \frac{1}{2}\left[u\Delta\ln\rho + \frac{\partial\ln\rho}{\partial x}\Big(u_x+v_y\Big) - \frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big(v_x-u_y\Big)\right], \tag{16}$$

$$2\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\Big(u^2+v^2\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\ln\rho\right) - \frac{1}{2}\Delta v =$$
$$= \frac{1}{2}\left[v\Delta\ln\rho + \frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big(u_x+v_y\Big) + \frac{\partial\ln\rho}{\partial x}\Big(v_x-u_y\Big)\right]. \tag{17}$$

Для того чтобы имелась возможность интерпретации этих уравнений как гидродинамических уравнений вязкой жидкости, к ним необходимо добавить некоторый аналог уравнения неразрывности. Этот аналог можно получить из соотношений (9). Действительно, при использовании введенных обозначений вещественная часть этих уравнений принимает следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} = -\rho Q + \rho(u^2+v^2), \tag{18}$$

а мнимая эквивалентна условию квазипотенциальности, то есть потенциальности плотности импульса жидкости:

$$\frac{\partial\rho u}{\partial y} - \frac{\partial\rho v}{\partial x} = 0. \tag{19}$$

Поскольку соотношение (18) содержит ненулевую правую часть, то такой подход не соответствует в точности течениям несжимаемой жидкости. Однако выбором дополнительных ограничений для T можно получить нужное представление двумерных течений жидкости. В качестве такого ограничения можно рассмотреть случай $R = \mathrm{const}$, эквивалентный двумерному уравнению теплопроводности для T. В этом случае уравнения (16) и (17) упрощаются и переходят в двумерный аналог уравнений Бюргерса потенциального двумерного течения.

4. Для построения точного аналога уравнений Эйлера по аналогии с [2] рассмотрим в качестве уравнения для T уравнение следующего вида:

$$\Big\{T_{\bar{z}}, T_t\Big\} = T_{\bar{z}z}T_{tt} - T_{\bar{z}t}T_{zt} = 0, \tag{20}$$

где введены скобки $\{,\}$:

$$\Big\{G, H\Big\} = G_zH_t - G_tH_z.$$

Уравнение (20) эквивалентно связи:

$$P\overline{\mathrm{P}} - RQ = 0. \tag{21}$$

Если подставить выражения из (5) и (11) для R, Q, P в (21), то это уравнение примет следующий вид:

$$W_t + \overline{\mathrm{W}}W_{\bar{z}} = \frac{|W_t|^2}{Q\overline{\mathrm{W}}}.$$

При выполнении (21) уравнения (9) будут выглядеть следующим образом:

$$R_t = P_{\bar{z}}, \quad R_t = \overline{\mathrm{P}}_z. \tag{22}$$

В этом случае (18) примет стандартный вид уравнения неразрывности:

$$\rho_t + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \tag{23}$$

Уравнения же (16) и (17) становятся уравнениями Эйлера для квазипотенциального течения жидкости:

$$2\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\Big(u^2 + v^2\Big)\right] = 0, \tag{24}$$

$$2\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\Big(u^2 + v^2\Big)\right] = 0. \tag{25}$$

Уравнения (23), (24 и (25) в совокупности представляют собой уравнения Эйлера сжимаемой жидкости с потенциальной плотностью импульса, удовлетворяющего условию (19).

5. Точные решения уравнений Эйлера (23)–(25) могут быть построены с помощью всей совокупности соотношений для функций W, P, Q, R, реализующих обобщенную подстановку Коула-Хопфа для заданной вещественной функции T, которая должна удовлетворять уравнению (20). По своей структуре это уравнение аналогично рассмотренному в [2]. Общий интеграл этого уравнения можно представить в следующей форме:

$$T_t = H\Big(T_{\bar{z}}\Big), \tag{26}$$

где $H(Z)$ – произвольная аналитическая функция одного комплексного аргумента $Z = X + iY = (T_x + iT_y)/2$. Уравнение (26) распадается на вещественную и мнимую части:

$$T_t = A(T_x, T_y), \quad B(T_x, T_y) = 0, \tag{27}$$

где функции $A(X,Y)$ и $B(X,Y)$ удовлетворяют условиям Коши:

$$A_X = -B_Y, \quad A_Y = B_X,$$
$$A_{XX} + A_{YY} = 0, \quad B_{XX} + B_{YY} = 0.$$

Например, для случая, $H = -iZ^2$ имеем:

$$2T_t = T_x T_y, \quad (T_x)^2 - (T_y)^2 = 0. \tag{28}$$

Это и другие решения этих уравнений многозначны не только в смысле обрушения волн вдоль характеристик, но и в смысле наличия у них множества пересекающихся характеристик. Уравнения (28) имеют две характеристики $T_y = \varepsilon T_x$, где $\varepsilon = \pm 1$, на каждой из которых решение для $q = T_x$ находится как решение уравнения простых волн: $2q_t = \varepsilon q q_x$ (см. [5]). Другой пример $H(Z) = e^{2Z}$, приводящий к системе:

$$T_t = e^{T_x}\cos\Big(T_y\Big), \quad \sin(T_y) = 0,$$

демонстрирует ситуацию с бесконечным дискретным числом характеристик $T_y = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6. Таким образом, новый подход, основанный на методе подстановок Коула-Хопфа, позволяет эффективно применять его к исследованию уравнений гидродинамики сжимаемой жидкости в размерности 1+2. Одним из наиболее важных результатов данного подхода является выявление специфической структуры характеристик двумерных уравнений Эйлера для квазипотенциального потока. Построенные интегралы (26) и (27) уравнений Эйлера дают возможность по-новому взглянуть на внутреннюю структуру решений уравнений Эйлера двумерных течений несжимаемой жидкости. Отметим, что полученное представление уравнений Эйлера и их точных решений для двумерных квазипотенциальных течений могут быть расширены с помощью обобщения исходного уравнения (20). Такое обобщение можно построить по аналогии с работой [2]. Именно, можно рассмотреть дополнительное уравнение на T в следующем виде:

$$\Big\{T_{\bar{z}}, T_t - \Phi\Big\} = 0, \tag{29}$$

где $\Phi = \Phi\Big(T, T_z, T_{\bar{z}}, T_{zz}, \ldots\Big)$. Это уравнение эквивалентно связи:

$$R\Big(Q - \Phi_t/T_t\Big) - \overline{\mathrm{P}}\Big(P - \Phi_z/T_t\Big) = 0,$$

из которой функция T и ее производные исключаются. Например, в случае $\Phi = \beta T$, где $\beta = \mathrm{const}$, приводит к связи

$$R(Q - \beta) = \overline{\mathrm{P}}(P - \beta W),$$

что в свою очередь приводит к некоторому обобщению вида объемных сил в уравнениях Эйлера. Интеграл уравнения (29), аналогичный (26), в этом случае будет иметь следующий вид: $T_t - \beta T = H(T_{\bar{z}})$ при тех же свойствах функции $H(Z)$. Анализ таких обобщенных условий и интегралов соответствующих уравнений требует отдельного анализа.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 08-01-97013-р_поволжье_а.

1. В. М. Журавлев, А. В. Никитин, Нелинейный мир, **5**, 603 (2007).
2. В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев, Письма в ЖЭТФ **87**, 314 (2008).
3. Б. А. Урюков, Теплофизика и аэромеханика **6**, 421 (1999).
4. J. M. Burgers, *The nonlinear diffusion equation*, Dordrecht, Holland: D. Reidel Publisher Company, 1974.
5. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, М.: Мир, 1978.
6. С. И. Спинолупов, ТМФ, **65**, 303 (1985).
7. А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, УМН **42**, №4, 3 (1987).
8. В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, ТМФ **125**, 355 (2000).
9. A. I. Zenchuk and P. M. Santini, arXiv:0801.3945v1 [nlin.SI].
10. В. М. Журавлев, ПММ **58**, 60 (1994).