

# К теории ионизации Келдыша в случае ультракоротких лазерных импульсов

Б. М. Карнаков<sup>1)</sup>, В. Д. Мур, В. С. Попов\*

Московский инженерно-физический институт (государственный университет)  
115409 Москва, Россия

\*Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 июля 2008 г.

Получено замкнутое аналитическое выражение для импульсного распределения фотоэлектронов в случае ионизации атомов и ионов ультракоротким лазерным импульсом. На его основе рассмотрены некоторые модели электромагнитных импульсов и интерференционный эффект в вероятности ионизации.

PACS: 03.65.Pm, 32.80.Rm

1. Исследованию процессов ионизации атомов, ионов и молекул в поле мощного лазерного излучения посвящено в настоящее время огромное число работ<sup>2)</sup>. Повышение интенсивности излучения, необходимое для проведения экспериментов в сильных полях, достигается сжатием лазерных импульсов, длительность которых сравнивается уже с оптическим периодом. Вычисление вероятности ионизации атомов и энергетического спектра фотоэлектронов в случае монохроматического импульса произвольной формы является актуальной задачей; ей и посвящена данная работа.

2. В задаче об ионизации атомного  $s$ -уровня пространственно-однородным переменным электрическим полем  $\mathcal{E}(t)$  можно получить замкнутое выражение для импульсного спектра вылетающих электронов. Используя запаздывающую временную функцию Грина электрона в однородном электрическом поле, нестационарное уравнение Шредингера можно представить в интегральной форме [7] и, предполагая, что электрон связан короткодействующими силами, выделить расходящуюся сферическую волну в волновой функции. Амплитуды разложения ее по плоским волнам определяют импульсное распределение вылетающих электронов:

$$dw(\mathbf{q}) = |M(\mathbf{q})|^2 d^3q, \quad (2.1)$$

$$M(\mathbf{q}) = i \frac{\sqrt{2}}{\pi} C_\kappa K_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{iK_0\Phi(\theta)} d\theta,$$

где фаза  $\Phi$  равна

$$\Phi(\theta) = \theta + \frac{1}{\gamma^2} \int_0^\theta [\mathbf{a}(\theta') - \mathbf{a}(\infty) + \gamma \mathbf{q}]^2 d\theta'. \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{q} = \mathbf{p}/\kappa$  – импульс (безразмерный) фотоэлектрона,  $\kappa = \sqrt{2I}$  – атомный импульс,  $I$  – потенциал ионизации (используется атомная система единиц,  $e = \hbar = m = 1$ ). Параметр многоквантовости процесса  $K_0$  и параметр Келдыша  $\gamma$  равны:

$$K_0 = \frac{I}{\omega}, \quad \gamma = \frac{1}{2K_0F}, \quad F = \frac{\mathcal{E}_0}{\kappa^3}, \quad (2.3)$$

где  $\omega$  – характерная частота электромагнитного импульса,  $\mathcal{E}_0$  – его амплитудное значение, а  $\theta$  – безразмерное время:

$$\mathcal{E}(t) \equiv -\mathcal{E}_0 \varphi(\theta) = -\mathcal{E}_0 \mathbf{a}'(\theta), \quad \mathbf{A}(t) = \frac{c}{\omega} \mathcal{E}_0 \mathbf{a}(\theta), \quad \theta = \omega t \quad (2.4)$$

(считаем  $\mathbf{a}(-\infty) = 0$ ),  $C_\kappa$  – асимптотический (на расстояниях  $r \gg \kappa^{-1}$  от ядра) коэффициент волновой функции рассматриваемого состояния [8]. Для потенциала нулевого радиуса действия  $C_\kappa = 1/\sqrt{2}$ , для основного состояния атома водорода  $C_\kappa = 1$ , а для  $s$ -состояний других атомов и ионов значения  $C_\kappa$  близки к единице.

Уравнение (2.1) справедливо при условии, что приведенное поле  $F \ll 1$  и  $K_0 > 1$ . В приближении слабого поля,  $\gamma \gg K_0$ , учитывая в разложении экспоненты в (2.2) линейное по полю слагаемое и выполняя двукратное интегрирование по частям, приходим к выражению

$$M(\mathbf{p}) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} C_\kappa \frac{\sqrt{\kappa}}{(p^2 + \kappa^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p} \mathcal{E}(t) e^{i(p^2 + \kappa^2)t/2} dt, \quad (2.5)$$

<sup>1)</sup> e-mail: karnak@theor.mephi.ru

<sup>2)</sup> См., например, обзоры [1–4]. Квазиклассическая теория ионизации в монохроматическом поле развита в работах [5–7], не потерявших своего значения и в наши дни. Обзор современного состояния теории ионизации Келдыша см. в [8].

которое совпадает с первым порядком нестационарной теории возмущений [9]. Оно справедливо и при  $\gamma \gg 1$ ,  $K_0 \ll 1$ , когда не требуется выполнения условия  $F \ll 1$ .

Если выполняются условия применимости квазиклассической теории Келдыша

$$K_0 \gg 1, \quad F \ll 1, \quad K_0 \gg \gamma^2, \quad (2.6)$$

интеграл в (2.1) можно вычислить методом перевала. Уравнение  $\Phi'(\theta_s) = 0$  для седловых точек  $\theta_s(\mathbf{q}) \equiv \equiv \omega t_s(\mathbf{q})$  можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \pi^2(t_s) = -I = -\frac{1}{2} \kappa^2, \quad \pi(t) = \mathbf{p} + (1/c)[\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(\infty)] \quad (2.7)$$

и с экспоненциальной точностью получить

$$|M(\mathbf{p})|^2 \propto \exp[-2K_0 \text{Im} \Phi(\theta_s)] \equiv \exp[-2 \text{Im} W(t_s)],$$

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [\pi^2(t') + \kappa^2] dt'. \quad (2.8)$$

Поскольку укороченное действие  $W(t_s)$  вычисляется вдоль подбарьерной траектории, а начальный момент подбарьерного движения  $t_s$  определяется из условия (2.7), то это выражение совпадает как с результатом метода мнимого времени [7, 8], так и с адиабатическим приближением Ландау – Дыхне (метод комплексных траекторий) [9, 10].

Формула (2.1) позволяет получить и предэкспоненциальный множитель в импульсном распределении фотоэлектронов:

$$dw(\mathbf{q}) = \frac{4}{\pi} K_0 C_\kappa^2 \left| \sum_s [\Phi''(\theta_s)]^{-1/2} e^{iK_0 \Phi(\theta_s)} \right|^2 d^3 q, \quad (2.9)$$

где суммирование идет по всем перевальным (седловым) точкам, у которых значения  $\text{Im} \Phi(\theta_s)$  минимальны. Эта формула позволяет рассмотреть также интерференционные явления в процессе ионизации.

Далее мы ограничимся случаем линейной поляризации излучения, когда распределение электронов (2.9) для рассматриваемых ниже импульсов принимает вид

$$dw(\mathbf{q}) = C_\kappa^2 P(K_0, \gamma) \times$$

$$\times \exp \left\{ -2K_0 [f(\gamma) + c_\perp(\gamma) q_\perp^2 + c_\parallel(\gamma)(q_\parallel - q_0)^2] \right\} d^3 q. \quad (2.10)$$

Здесь  $f(\gamma)$  – обобщение функции Келдыша на случай ультракоротких импульсов, а  $q_\perp$  и  $q_\parallel$  – поперечная и продольная (по отношению к полю  $\mathcal{E}$ ) компоненты

импульса фотоэлектрона, наиболее вероятные значения которых равны

$$q_\perp^{(0)} = 0, \quad q_\parallel^{(0)} \equiv q_0 = \frac{1}{\gamma} [a(\infty) - a(\theta_s)], \quad (2.11)$$

что отвечает экстремальной [8] подбарьерной траектории в методе мнимого времени. В случае четных импульсов,  $\Phi(\theta) = \Phi(-\theta)$ , формулы для вычисления функции  $f(\gamma)$  и коэффициентов импульсного спектра  $c_\perp$ ,  $c_\parallel$  приведены в работах [8, 11].

**3. Четные лазерные импульсы.** Начнем с примера

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= (1 - \theta^2)(1 + \alpha^{-1}\theta^2)^{-(\alpha+3)/2}, \\ a(\theta) &= \theta(1 + \alpha^{-1}\theta^2)^{-(\alpha+1)/2}, \quad \alpha > 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

который может служить моделью ультракороткого импульса лазерного излучения (длительностью меньше полупериода поля).

Вблизи максимума поля ( $\theta = 0$ )

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= 1 - \frac{1}{2!} a_2 \theta^2 + \frac{1}{4!} a_4 \theta^4 + \dots, \\ a_2 &= 3 \frac{\alpha + 1}{\alpha}, \quad a_4 = 15 \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 3)}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

а его минимумы расположены при  $\theta = \pm\sqrt{3}$  (при любом  $\alpha$ ). Экстремальной является только одна подбарьерная траектория, отвечающая перевальной точке  $\theta_0 = i\tau_0$ . Мнимое время подбарьерного движения  $\tau_0(\gamma)$  определяется из уравнения

$$\tau_0 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \tau_0^2 \right)^{-(\alpha+1)/2} = \gamma. \quad (3.3)$$

Все функции, входящие в формулу (2.10), выражаются через  $\tau_0(\gamma)$ :

$$f(\gamma) = \tau_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{\tau_0^2}{\gamma^2} {}_2F_1(3/2, \alpha + 1; 5/2; \tau_0^2/\alpha) \right], \quad (3.4)$$

см. рис.1,

$$c_\perp = \tau_0, \quad c_\parallel = \frac{1}{3} a_2 \frac{\tau_0^3}{1 + \tau_0^2}, \quad (3.5)$$

$$P(K_0, \gamma) = \frac{2}{\pi} K_0 \frac{\tau_0}{1 + \tau_0^2} \left( \frac{\tau_0}{\gamma} \right)^{2/(\alpha+1)}.$$

Интегрирование распределения (2.10) по импульсам дает полную вероятность ионизации:

$$\begin{aligned} w &= C_\kappa^2 \frac{1}{c_\perp \varphi(i\tau_0)} \left( \frac{\pi \gamma^3 F}{c_\parallel} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{2g(\gamma)}{3F} \right\}, \\ g(\gamma) &= \frac{3}{2\gamma} f(\gamma). \end{aligned} \quad (3.6)$$

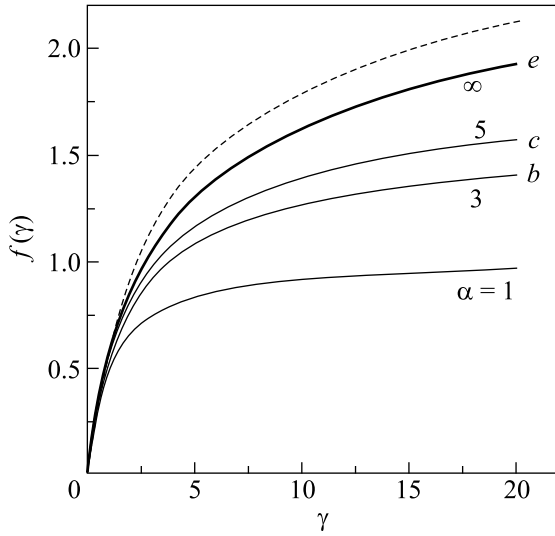


Рис.1. Функция  $f(\gamma)$  для четных импульсов вида (3.1) (около кривых указаны значения параметра  $\alpha$ ) и для нечетного импульса (4.1) – штриховая кривая

В адиабатической области,  $\gamma \ll 1$ , зависимость от формы импульса (то есть от параметра  $\alpha$ ) является довольно слабой:

$$f(\gamma) = \frac{2}{3}\gamma \left\{ 1 - \frac{1}{10}a_2\gamma^2 + \frac{1}{280}(10a_2^2 - a_4)\gamma^4 + \dots \right\}, \quad (3.7)$$

$$c_{\perp} = \gamma - \frac{1}{6}a_2\gamma^3 + \dots, \quad c_{\parallel} = \frac{1}{3}a_2\gamma^3 + \dots, \quad (3.8)$$

$$P(K_0, \gamma) = \frac{2}{\pi}K_0\gamma \left( 1 - \frac{1}{2}a_2\gamma^2 + \dots \right),$$

$$w \approx 2C_{\kappa}^2 K_0 \left[ \frac{3\pi F^3}{a_2} \right]^{1/2} e^{-2/3F}. \quad (3.9)$$

При  $\omega \rightarrow 0$  вероятность ионизации неограниченно возрастает, что формально связано с расходимостью интеграла по продольному импульсу. Поскольку в этом случае  $p_{\parallel} \approx \mathcal{E}_0 t$ , то, интегрируя (2.10) по импульсам, приходим к формуле Демкова и Друкарева [12, 9]  $\dot{w}_{st} = C_{\kappa}^2 \kappa^2 F e^{-2/3F}$  для скорости ионизации уровня в постоянном электрическом поле.

В многофотонном режиме,  $\gamma \gg 1$ , все функции в (2.10) (кроме предэкспоненты), выходят на постоянные значения при конечных  $\alpha$ :

$$f(\gamma) = \sqrt{\alpha} \left[ 1 - \frac{1}{2}\alpha^{1/(1+\alpha)}\gamma^{-2/(1+\alpha)} + \dots \right], \quad (3.10)$$

$$c_{\parallel} \approx c_{\perp} = \sqrt{\alpha} \left\{ 1 - O \left[ \gamma^{-2/(1+\alpha)} \right] \right\}.$$

Видно, что в этом случае угловое распределение фотоэлектронов изотропизуется.

В пределе  $\alpha \rightarrow \infty$  из (3.1) получаем<sup>3)</sup>

$$\varphi(\theta) = (1 - \theta^2) \exp(-\theta^2/2), \quad a(\theta) = \theta \exp(-\theta^2/2),$$

$$-\infty < \theta \equiv \omega t < \infty. \quad (3.11)$$

Уравнение для точки перевала принимает вид  $\tau_0 e^{\tau_0^2/2} = \gamma$ , см. рис.2, для функции  $f(\gamma)$  получаем

$$f(\gamma) = \tau_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} {}_1F_1(1; 5/2; -\tau_0^2) \right] =$$

$$= \begin{cases} (2/3)\gamma - (1/5)\gamma^3 + (5/28)\gamma^5 + \dots, & \gamma \ll 1, \\ \sqrt{2 \ln \gamma} \left[ 1 - \frac{\ln(\ln \gamma)}{4 \ln \gamma} + O \left( \frac{1}{\ln \gamma} \right) \right], & \gamma \gg 1, \end{cases} \quad (3.12)$$

а коэффициенты импульсного распределения и предэкспонента получаются из формул (3.5) предельным переходом  $\alpha \rightarrow \infty$ .

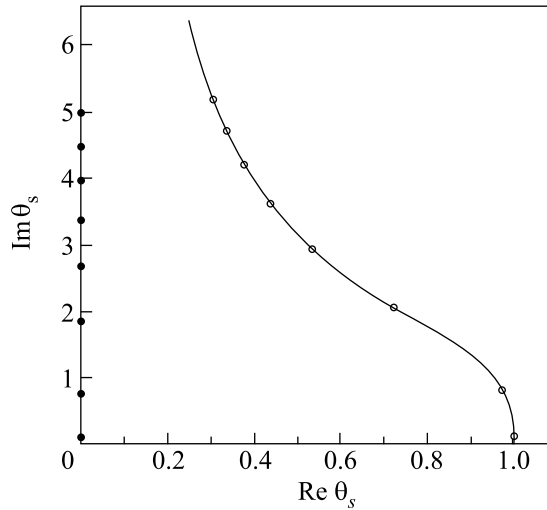


Рис.2. Седловые точки  $\theta_s(\gamma)$  при  $q_{\perp} = 0$  и  $q_{\parallel} = q_0$  на комплексной плоскости  $\theta = \omega t$  для четного (●) и нечетного (○) импульсов. Кружками отмечены положения седловых точек при  $\gamma = 0.1, 1, 10, 100, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$  (снизу вверх)

Отметим, что асимптотика функции  $f(\gamma)$  при  $\gamma \rightarrow \infty$  качественно различна для моделей (3.1) и (3.11). Эта асимптотика определяется аналитическими свойствами функции поля  $\varphi(\theta)$  в комплексной  $\theta$ -плоскости: для (3.1) имеется особенность в точке  $\theta = i\sqrt{\alpha}$ , а (3.11) – целая функция, не имеющая особенностей на конечном расстоянии.

<sup>3)</sup>Такой импульс рассматривался в работах [11] с помощью метода мнимого времени и в [13] в рамках приближения Ландау – Дыхне. Однако функция  $f(\gamma)$  и другие не были получены в аналитическом виде.

**4. Нечетные лазерные импульсы.** Иная картина возникает в случае нечетного импульса, для которого  $\varphi(-\theta) = -\varphi(\theta)$ . Рассмотрим модель такого импульса<sup>4)</sup>

$$\varphi(\theta) = \theta e^{(1-\theta^2)/2}, \quad a(\theta) = e^{(1-\theta^2)/2}, \quad \theta = \omega t. \quad (4.1)$$

Электрическое поле достигает амплитудных значений при  $\theta = \pm 1$ . Соответствующие точки перевала, см. рис.2, расположены симметрично (относительно мнимой оси) в комплексной  $\theta$ -плоскости:

$$\theta_+ = \left\{ 1 - 2 \ln \left[ 1 - i\gamma \sqrt{1 + q_{\perp}^2} - \gamma(q_{\parallel} - q_0) \right] \right\}^{1/2},$$

$$\theta_- = -\theta_+^*, \quad q_0 = -1/\gamma, \quad (4.2)$$

поэтому фазы  $\Phi(\theta_{s,\pm})$  даже для экстремальных траекторий ( $q_{\perp} = 0$  и  $q_{\parallel} = q_0$ ) являются комплексными:

$$\Phi(\theta_{\pm}) = \chi_{\pm}(\gamma) + if(\gamma) =$$

$$= \theta_{\pm} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 - 2e^{1/2} {}_1F_1(1/2; 3/2; -\theta_{\pm}^2/2) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + e {}_1F_1(1/2; 3/2; -\theta_{\pm}^2) \right] \right\} \quad (4.3)$$

( $e = 2.718\dots$ ), причем функция  $f(\gamma)$ , см. рис. 1, одинакова для обеих перевальных точек  $\theta_{\pm}$ , а  $\chi_{\pm}(\gamma)$  отличаются только знаком.

В адиабатической области распределение (2.10) принимает вид

$$dw = \frac{4}{\pi} C_{\kappa}^2 \gamma K_0 \cos^2(\chi K_0/\gamma^2) \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left[ 1 - (1/5)\gamma^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (3/2)q_{\perp}^2 + \gamma^2(q_{\parallel} - q_0)^2 \right] \right\} dq_{\perp}^2 dq_{\parallel}, \quad (4.4)$$

где  $\chi = \chi_+(0) \approx 0,209$ . В предэкспоненте возникают быстрые осцилляции, обязанные интерференции вкладов от двух экстремальных траекторий, вдоль которых одинаковы мнимые части функции действия  $W$ . Такой эффект в энергетическом спектре электронов был отмечен в [7] в случае монохроматической волны, а для ультракоротких импульсов – в работах [11, 14].

Интегрируя (4.4) по импульсам, для полной вероятности получаем

$$w = 4C_{\kappa}^2 K_0 \left( \frac{3\pi}{2} F^3 \right)^{1/2} \times$$

$$\times \cos^2(\chi K_0/\gamma^2) \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left( 1 - \frac{1}{5}\gamma^2 \right) \right\}. \quad (4.5)$$

В многофотонном пределе,  $\gamma \gg 1$ , имеем

$$\theta_+ = \frac{\pi}{2\sqrt{2 \ln \gamma}} + i\sqrt{2 \ln \gamma} \left( 1 - \frac{1}{4 \ln \gamma} + \dots \right), \quad (4.6)$$

и для импульсного распределения получаем

$$dw(\mathbf{q}) = \frac{4}{\pi^2} C_{\kappa}^2 K_0^2 \cos^2 \left( \frac{\pi K_0}{2\sqrt{2 \ln \gamma}} \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ -2K_0 \sqrt{2 \ln \gamma} (1 + q^2) \right\} d^3 q, \quad (4.7)$$

которое, как и для четных импульсов в этом режиме, становится изотропным. Отметим, что осцилляции в распределении (4.7) не столь быстрые, как в (4.5) и их частота уменьшается с ростом  $\gamma$ , но лишь логарифмически. При этом период осцилляций равен

$$\Delta\gamma \approx \gamma(2 \ln \gamma)^{3/2} K_0^{-1} \quad (4.8)$$

(например,  $\Delta\gamma \approx 3$  при  $K_0 = 10$  и  $\gamma = 5$ ), так что  $\Delta\gamma < \gamma$  при  $\gamma < \exp(K_0^{2/3}/2)$ .

Аналитическое решение возможно также в случае импульса вида  $\varphi(\theta) = 2 \sinh \theta / \cosh^2 \theta$ , для которого перевальные точки  $\theta_{\pm}$  при  $\gamma \rightarrow \infty$  не уходят на бесконечность, а стремятся к постоянному пределу  $i\pi/2$ . Соответственно, вероятность ионизации в этом случае почти не зависит от  $\gamma$  (при фиксированном значении  $K_0$ ).

**5. Сделаем несколько заключительных замечаний.**

1) Получена формула (2.1) для импульсного распределения фотоэлектронов в случае ионизации атомов и ионов ультракоротким лазерным импульсом.

2) В квазиклассическом случае амплитуда перехода  $M$  и вероятность ионизации  $w \propto |M|^2$  определяются точками перевала, удовлетворяющими уравнению  $\mathbf{p}^2(t_s) + \kappa^2 = 0$  и лежащими в верхней полуплоскости  $\text{Im } t_s > 0$ . Для четных однополярных импульсов имеется только одна такая точка на мнимой оси “времени”  $t$ , поэтому вероятность  $w(\gamma)$  – плавная функция  $\gamma$ .

3) Для нечетного импульса (4.1) оба уравнения,  $p(t_s^{\pm}) = \pm i\kappa$ , имеют решения в верхней полуплоскости, причем точки  $t_s^{\pm}$  находятся на одинаковом расстоянии от вещественной оси времени и  $M_- = M_+^*$ . Интерференция этих амплитуд и приводит к осцилляциям вероятности ионизации в зависимости от  $\gamma$ .

4) Полученные в разд.2 формулы определяют не только экспоненту, но и предэкспоненциальный множитель в вероятности ионизации. Это позволяет показать, что в пределе  $\omega \rightarrow 0$  из этих формул следует

<sup>4)</sup>Такая модель рассматривалась в работе Келдыша [14], который обратил внимание на существование интерференционных эффектов в импульсном распределении фотоэлектронов и в полной вероятности ионизации.

известное выражение для скорости ионизации в постоянном электрическом поле [12].

5) Ионизация связанного  $s$ -уровня импульсами вида (3.11) и (4.1) рассматривалась в статье [13]. Результаты для четного импульса совпадают (с экспоненциальной точностью) с нашими, а также с результатами более ранних работ [11]. Однако в случае нечетного импульса (4.1) приведенные в [13] формулы (19)–(22) и др. неправильны функционально, а численные значения вероятности ионизации занижены на много порядков, особенно в области малых  $\gamma$ . При этом эффект туннельной интерференции был интерпретирован ошибочным образом.

6) Осцилляции в энергетическом спектре фотоэлектронов впервые были отмечены, по-видимому, в [7] для случая линейной поляризации монохроматического излучения, а их существование для ультракороткого лазерного импульса – в [14]. Этот эффект получил название *туннельной интерференции* и наблюдался на эксперименте; см. в этой связи работы [15–17], а также разд.4 в обзоре [8].

Авторы благодарны С.П. Гореславскому и С.В. Попруженко за обсуждение результатов и полезные замечания, а также С.Г. Позднякову за помощь в численных расчетах.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты # 07-02-01116 и # 06-02-17370, а также Президентской программой поддержки ведущих научных школ (грант # НШ-320.2006.2) и Министерством науки и образования РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” РНП 2.1.1.1972.

1. T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
2. W. Becker, F. Grasbon, R. Kopolt et.al., *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 35 (2002).
3. T. Tajima and G. Mourou, *Phys. Rev. Special Topics – Accel. and Beams* **5**, 031301 (2002).
4. P. Agostini and L. F. DiMaure, *Rep. Prog. Phys.* **67**, 813 (2004).
5. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1945 (1964).
6. А. И. Никишов, В. И. Ритус, *ЖЭТФ* **50**, 255 (1966).
7. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, *ЖЭТФ* **50**, 1393; **51**, 309 (1966).
8. В. С. Попов, *УФН* **174**, 921 (2004).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, М.: Наука, 1974.
10. А. М. Дыхне, *ЖЭТФ* **38**, 570 (1960); **41**, 1324 (1961).
11. В. С. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **73**, 3 (2001); *ЖЭТФ* **120**, 315 (2001).
12. Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев, *ЖЭТФ* **47**, 918 (1964).
13. V. S. Rastunkov and V. P. Krainov, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **40**, 2277 (2007).
14. L. Keldysh, “Multiphoton ionization by a very short laser pulse”, частное сообщение (2001).
15. G. G. Paulus, F. Zacher, H. Walther et.al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 484 (1998).
16. G. G. Paulus, F. Grasbon, A. A. Dreischuh et.al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3791 (2000).
17. F. Lindner, M. G. Schötzel, H. Walther et.al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 040401 (2005).