Письма в ЖЭТФ, том 89, вып. 5, с. 259 – 263 © 2009 г. 10 марта

Нелинейные спиральные волны в галактическом диске

П. С. Алексеев[1)], *А. А. Даниленко*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, 194021 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 21 января 2009 г.

Найдено аналитическое решение уравнений нелинейной динамики галактического диска, описывающее спиральный узор спиральных галактик. Объясняются логарифмическая форма спирального узора, а также относительно бо́льшая величина флуктуации плотности по сравнению с флуктуациями поля скоростей. При некотором критическом значении амплитуды найденного решения происходит его опрокидывание. Это может служить одним из механизмов возникновения галактических ударных волн и узких областей звездообразования.

PACS: 98.52.Nr, 98.56.Ne

1. Гипотеза волн плотности для объяснения спирального узора спиральных галактик предложена в работе [1]. В статьях [2] в линейном приближении были построены спиральные волны плотности для галактического диска, описываемого уравнениями гидродинамики или бесстолкновительным кинетическим уравнением. Модель [2], оставаясь важной и сегодня, содержит серьезные трудности. Во-первых, в работе [3] было показано, что решения [2] являются неустойчивыми в широкой области параметров, описывающих модели галактик. Во-вторых, в реальных галактиках отклонения плотности вещества в рукавах от плотности вне рукавов не являются малыми [4], как предполагалось в линейной модели [2]. В-третьих, недавние наблюдения указывают на то, что во многих галактиках существует гало из темной материи, масса которого часто превосходит наблюдаемую массу звезд и газа [5]. Этот факт сейчас также необходимо учитывать при описании спирального узора. Наконец, отметим следующее обстоятельство. В спиральных галактиках звезды наиболее активно образуются в областях повышенной плотности газа в спиральных рукавах [6]. Однако эти области активного звездообразования достаточно узкие, чтобы их можно было непосредственно связать со спиральными волнами [2]. В этой связи в работе [7] обсуждалась возможность существования связанных со спиральными волнами плотности крупномасштабных ударных волн и связанных с ними узких областей звездообразования.

С другой стороны, нужно отметить работу [8] как первую попытку нелинейного рассмотрения спирального узора в целях преодоления описанных выше трудностей линейной теории (см. также [4, 9]). Спиральные волны плотности рассматривались как солитоны огибающей мелкомасштабных возмущений. Однако солитон [8] не был периодическим по азимутальному углу и был локальным по радиусу.

В этой статье строится аналитическое решение уравнений гидродинамики галактического диска в виде нелинейных спиральных волн в некотором кольце диска, где изменением усредненной по азимутальному углу угловой скорости вращения можно пренебречь. Считается, что гравитационная сила преимущественно является аксиально симметричной и обусловлена симметрично распределенными темной материей и/или светящейся материей в центральной части галактики. Полученное решение дает описание спирального узора во всем рассматриваемом кольце, а не в небольшом участке диска, как в работе [8].

2. Следуя [2, 6], динамику газовой составляющей галактического диска будем описывать следующей системой уравнений двумерной гидродинамики:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r},\\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r\, v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},\\
&\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v_r\,\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\,\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} +\\
&+\frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\, v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где Φ – потенциал гравитационного поля, σ – двумерная плотность газа. В системе (1) мы пренебрегаем давлением газа, то есть считаем скорость звука малой по сравнению с характерными скоростями v_r и v_φ. Такое описание, во-первых, относится к началь-

[1)]e-mail: alekseev_p_s@mail.ru

ному периоду жизни галактик, когда звезд еще мало, а, во-вторых, в работе [10] было показано, что этот подход может быть применим, даже когда звезды составляют значительную часть вещества галактики.

Рассмотрим кольцо галактического диска: $r_1 < < r < r_2$, $0 < \varphi < 2\pi$, в котором усредненную по углу φ угловую скорость Ω_0 вращения газа можно считать постоянной. Такое приближение, по крайней мере, для некоторых галактик является справедливым (см. рис.1 и обзор [4]). Строгая независимость

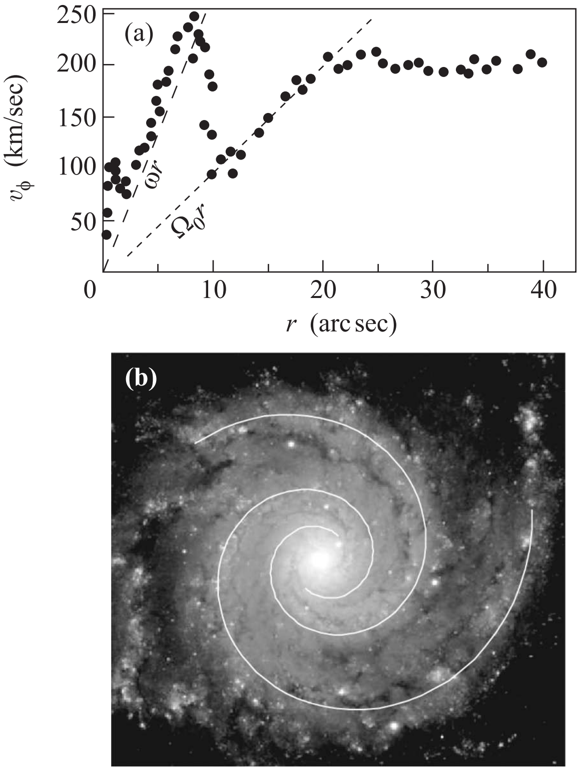

Рис.1. (а) Кривая вращения галактики Mrk 1040. Рисунок взят из обзора [4]. Четко видны два участка постоянной угловой скорости. Приведена условная “кривая вращения спирального узора” $v_{\rm spiral} = \omega r$, построенная на основе оценки положения коротационной окружности в [4], с целью показать соотношение величин ω и Ω_0 вне коротационной окружности. (b) Галактика M 74 и наложенные на ее рукава логарифмические спирали $r = r_0\, e^{m\,\varphi/q}, r_0\, e^{m\,(\varphi+\pi)/q}$ с подходящим образом выбранными параметрами ($m/q \approx 0.2$)

угловой скорости от переменных φ и r приводила бы к тому, что гравитационный потенциал имел бы вид

$$\nabla\Phi = \alpha\, r\, \mathbf{e}_r\,, \quad \sqrt{\alpha} = \Omega_0\,. \tag{2}$$

В связи с этим положим в основу нашей модели предположение, что есть симметричный гравитационный потенциал (2), и будем искать аксиально несимметричное решение системы (1), описывающее спиральный узор. Говоря точнее, отклонение гравитационного потенциала от формулы (2) будет считаться малым настолько, что вызываемое им влияние на поля скоростей и плотности мало по сравнению с характерными величинами полей в нашем решении, построенном на основе симметричного потенциала. В частности, влияние асимметрии гравитационного потенциала на асимметрию поля плотности мало по сравнению с асимметрией поля плотности построенного решения. Источником симметричного потенциала вида (2) может быть центральная звездно-газовая часть галактики (это аналогично подходу [10]) и/или сферическое гало темной материи [5].

Применимость модели с пренебрежением влияния самогравитации связана со следующими оценками. Уравнение Пуассона приводит к связи гравитационной силы $(\nabla\Phi)_{\rm gas}$, вызванной газом, и двумерной плотности газа $\sigma_{\rm gas}(\mathbf{r})$:

$$(\nabla\Phi)_{\rm gas}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\int \frac{G\,\sigma_{\rm gas}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, d^2\mathbf{r}'\,.$$

Отношение δ этой силы, например, к члену $v_r(\partial v_r/\partial r)$ в уравнении (1) оценим величиной:

$$\delta \sim G\,\sigma_{\rm gas}/v_r^2\, k,$$

где v_r – характерная скорость радиального движения, k – характерный волновой вектор поля скорости в построенном солитоне. Если, в отличие от [2, 10], рассматривать не плотно навитые спирали (см. рис.1), когда у узора есть всего один или два оборота, то k можно оценить как $1/R$, где R – характерный радиус рассматриваемой области галактики. В этом случае, используя связь скорости вращения v_φ с трехмерной плотностью $\varrho_{\rm dark}$ темной материи, $G\varrho_{dark} \sim \Omega_0^2 \sim v_\varphi^2/R^2$, имеем:

$$\delta \sim \frac{\sigma_{\rm gas}/R}{\varrho_{\rm dark}}\,\frac{v_\varphi^2}{v_r^2}.$$

Таким образом, в случае малой доли массы газа в рассматриваемом кольце по отношению к массе темного вещества, а также при больших – нелинейных – возмущениях скорости относительно скорости твердотельного вращения в уравнении (1) анизотропным вкладом от самогравитации газа можно пренебречь.

Будем искать решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned} v_{r,\varphi}(r,\varphi,t) &= \bar{v}_{r,\varphi}(r)\,\theta_{r,\varphi}(\psi), \\ \sigma(r,\varphi,t) &= \sigma_0(r)\,\exp[\,\theta_\sigma(\psi)], \end{aligned} \tag{3}$$

где $\psi = -\omega\, t + m\,\varphi + \phi(r)$, θ_i – безразмерные 2π-периодические функции. Такой анзац соответствует единственному предположению, что форма спиральной волны по переменной φ не зависит от радиуса r. Запись (3) аналогична общепринятой концепции спирального узора [2, 9, 10] за тем исключением, что мы, вообще говоря, не будем считать функции θ_i тригонометрическими.

Если функции $\bar{v}_i$, σ_0 и ϕ таковы, что (3) представляет собой решение (1), то разумно ожидать, что при каждом r выражение (3) как функция от φ и t есть простейший периодический солитон нелинейной системы (1). Действительно, в классических нелинейных уравнениях односолитонные решения имеют автомодельный вид – с зависимостью волновой величины от $\psi = x - vt$. Это утверждение, скорее всего, справедливо и для периодических солитонов, например, это так для периодических солитонов уравнения КдВ [11]. В работе [8] солитоном называется также и функция переменных r, φ и t, аналогичная (3) и представляющая собой решение уравнений динамики газового диска в цилиндрических координатах.

Самым простым решением вида (3) является твердотельное вращение: $v_\varphi = \Omega_0 r$, $v_r = 0$. Анзац (3) включает в себя также и линейный режим. Действительно, подставляя в (1) поле скоростей в виде

$$v_\varphi(r,\varphi,t) = \Omega_0\, r + a(r)\, e^{i\,(-\omega\, t + m\,\varphi)},$$
$$v_r(r,\varphi,t) = b(r)\, e^{i\,(-\omega\, t + m\,\varphi)},$$
$$a(r), b(r) \ll \Omega_0\, r,$$

получаем, что функции $a(r)$ и $b(r)$ удовлетворяют следующей системе уравнений (члены с производными по r случайно выпали):

$$\begin{aligned} -2\,\Omega_0\, a + i\,(-\omega + m\,\Omega_0)\, b = 0, \\ i\,(-\omega + m\,\Omega_0)\, a + 2\,\Omega_0\, b = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (4) означают, что здесь малые возмущения не являются плоскими волнами, а могут зависеть от r произвольным образом. Это указывает на то, что в линейном приближении такую модель лучше не применять, так как на зависимость возмущения от переменной r обязательно окажет влияние учет самогравитации и диссипации. Однако уравнения (4) приводят к соотношению амплитуд и фаз функций a и b и к дисперсионному соотношению, определяющему частоту ω вращения спирального узора[2)]:

$$\tilde{\omega} \equiv \omega/\Omega_0 = m - 2\,. \tag{5}$$

[2)] Отметим, что существует также решение $\tilde{\omega} = m+2$. Ему в нелинейном рассмотрении п. 3 соответствует убывание функции $\psi(\chi)$, в частности $\psi(2\,\pi) = -2\,\pi$. Свойства получаемых солитонов для $\tilde{\omega}_\pm = m \pm 2$ совершенно аналогичны.

3. Подставляя (3) в (1), получаем, что формула (3) является решением тогда и только тогда, когда

$$\bar{v}_{r,\varphi}(r) = \Omega_0\, r\,, \quad \phi(r) = q\, \ln(r/r_0)\,, \quad \sigma_0(r) = \mu\, r^\gamma, \tag{6}$$

где q, r_0, μ и γ – произвольные параметры. Если выполнено условие (6), то мы получаем систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для функций $\theta_r(\psi)$ и $\theta_\varphi(\psi)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_r}{d\psi} &= \frac{\theta_r^2 - \theta_\varphi^2 + 1}{-\tilde{\omega} + q\,\theta_r + m\,\theta_\varphi}, \\ \frac{d\theta_\varphi}{d\psi} &= \frac{2\,\theta_r\,\theta_\varphi}{-\tilde{\omega} + q\,\theta_r + m\,\theta_\varphi}. \end{aligned} \tag{7}$$

Периодичность функций $\theta_i(\psi)$ выражается при помощи граничных условий $\theta_i(0) = \theta_i(2\,\pi)$. Решив сформулированную краевую для $\theta_r(\psi)$ и $\theta_\varphi(\psi)$, $0 < \psi < 2\pi$, мы тем самым, опираясь на высказанные в п. 2 аргументы, построим периодическое односолитонное решение системы (1) при фиксированном r. Отметим, что существование волн вида (3) с фазой и амплитудой вида (6) сколь угодно большой нелинейности является замечательным фактом и связано со структурой гидродинамического оператора $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}$.

Третья формула из (1) с учетом (3) дает явное алгебраическое выражение для θ'_σ через θ_r и θ_φ. Требование, чтобы функция $\theta_\sigma(\psi)$ была периодической, приводит к условию $\gamma = -2$. В итоге получаем:

$$\exp[\theta_\sigma(\psi)] = \frac{1}{-\tilde{\omega} + q\,\theta_r(\psi) + m\,\theta_\varphi(\psi)}. \tag{8}$$

Легко получить первый интеграл системы (7):

$$\theta_r^2 + (\theta_\varphi - C)^2 = C^2 - 1.$$

Отсюда видно, что фазовые траектории системы (7) – вложенные окружности (но не концентрические). Окружности нумеруются константой C, $|C| \geq 1$, их радиусы равны $\lambda = \sqrt{C^2 - 1}$. Знак константы C определяет общий знак v_φ, то есть направление вращения. Точка $(0, 1)$ $(C = 1)$ также является решением и соответствует твердотельному вращению. Небольшие окружности соответствуют линейному режиму небольших возмущений скорости. Рост радиуса соответствует росту нелинейности солитона. Параметризуем окружности с помощью полярного угла χ:

$$\theta_r = \lambda\,\cos\chi, \quad \theta_\varphi = \sqrt{\lambda^2 + 1} + \lambda\,\sin\chi\,. \tag{9}$$

Из первого из уравнений (7) выразим ψ через χ:

$$\psi(\chi) = \int_{\theta_r(0)}^{\theta_r(\chi)} \frac{-\tilde{\omega} + q\,\theta_r + m\,\theta_\varphi}{\theta_r^2 - \theta_\varphi^2 + 1}\, d\theta_r. \qquad (10)$$

Отсюда, используя (9), найдем явные формулы для функции $\psi(\chi)$. Считая, что $\psi(0) = 0$, получим $\psi(\chi) = \psi_1(\chi)$ для углов $0 < \chi < \pi$ и $\psi(\chi) = \psi_1(\chi) - \tilde{\omega}\,\pi$ для углов $\pi < \chi < 2\,\pi$, где

$$\psi_1(\chi) = -\tilde{\omega}\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{\lambda^2+1}\,\mathrm{tg}\,(\chi/2) + \lambda\right] + \\ + \tilde{\omega}\,\mathrm{arctg}\,(\lambda) + \frac{q}{2}\ln\left[\frac{\lambda\sin\chi}{\sqrt{\lambda^2+1}} + 1\right] + \frac{m\,\chi}{2}. \qquad (11)$$

Граничные условия $\theta_{r,\varphi}(0) = \theta_{r,\varphi}(2\,\pi)$ выполняются, если $\psi(2\,\pi) = 2\pi$. Это требование является “нелинейным дисперсионным соотношением”, связывающим величину частоты $\tilde{\omega}$ с параметрами q, r_0, m и нумерующим окружности константой C. Замечательно, что из требования $\psi(2\,\pi) = 2\pi$ получается, тем не менее, то же дисперсионное соотношение (5), что и в линейном случае (константа C выпадает из нелинейного дисперсионного соотношения). Величины q и r_0 для каждого значения m также остаются произвольными. Это означает, в частности, что в развитой теории не отдается предпочтения ни лидирующим, ни отстающим спиралям.

При $\lambda \to 0$ формула (11) с учетом (5) дает $\psi(\chi) = \chi$, что соответствует линейному режиму. С нарастанием амплитуды солитона его профиль становится существенно ангармоническим. При определенном значении $C = C_{cr}$ зависимость $\chi(\psi)$ в некоторой точке ψ_{cr} начинает становиться многозначной, а значит многозначными становятся и функции $\theta_i(\psi)$. Такая ситуация, называемая в гидродинамике опрокидыванием волны, означает, что используемая модель уже неприменима, и нужно учитывать диссипацию. При учете диссипации опрокинутый фронт сглаживается и описывает ударную волну. Числа C_{cr} и $\chi_{cr} = \chi(\psi_{cr}; C_{cr})$ находятся из системы уравнений:

$$\psi'(\chi; C) = 0,$$

$$\psi''(\chi; C) = 0.$$

На рис.2 показано, как меняется значение C_{cr} с изменением q и m. Падение величины C_{cr} с ростом q достаточно понятно, так как бо́льшие q соответствуют более плотно навитым спиралям.

На рис.3 представлены функции $\theta_\varphi(\psi)$ и $\exp[\theta_\sigma(\psi)]$ для разных значений параметра C. Хорошо прослеживается переход солитона от линейного режима к сугубо нелинейному при изменении C от 0 до C_{cr}. Видно, что при C, достаточно близких к C_{cr}, заданным относительным изменениям θ_φ в солитоне соответствуют гораздо бо́льшие относительные изменения плотности вещества в спиралях

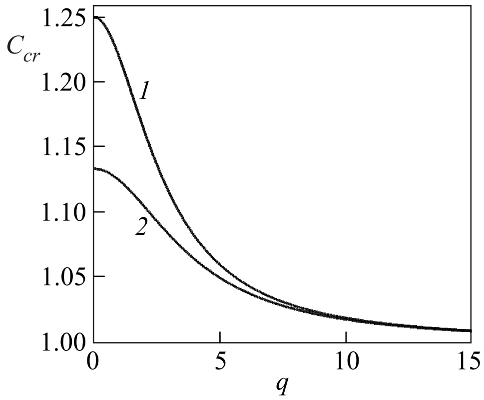

Рис.2. Зависимость величины C_{cr} от параметра q для $m = -2$ (кривая *1*) и для $m = -3$ (кривая *2*)

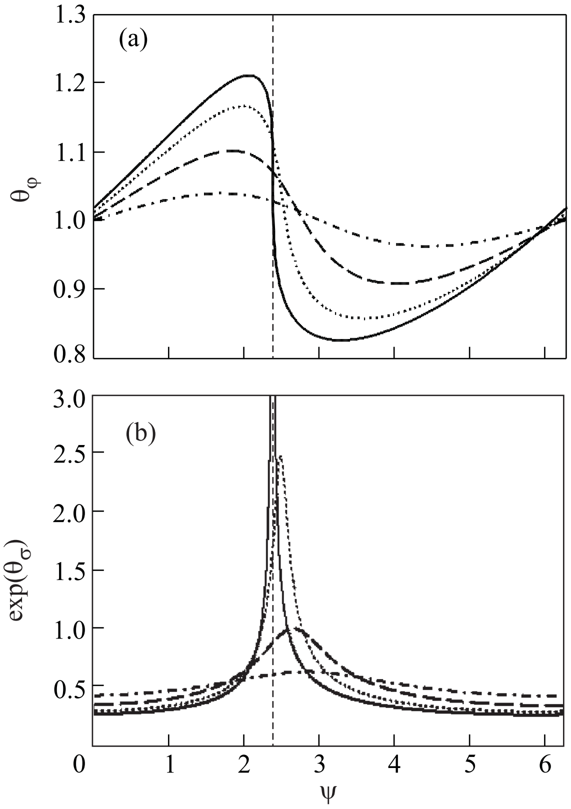

Рис.3. Профили солитонных функций $\theta_\varphi(\psi)$ (a) и $\exp[\theta_\sigma(\psi)]$ (b) для параметров $q = 10$, $m = -2$ и амплитуды солитона λ, равной 0.2 (штрих-пунктирная линия), 0.5 (штриховая), 0.8 (пунктирная) и 1.0 (сплошная) от ее возможного максимального значения $\lambda_{cr} = \sqrt{C_{cr}^2 - 1}$. Вертикальная штриховая линия показывает положение точки ψ_{cr}

и вне их. Этот факт следует также из следующих соображений. Если в солитоне флуктуации θ_φ порядка самой величины θ_φ, то и флуктуации θ_σ (в силу алгебраической связи θ_r, θ_φ и θ'_σ) будут порядка величины θ_σ. А из-за наличия экспоненты во второй строке формулы (3) флуктуации σ при этом будут гораздо больше среднего значения σ. Из рис.3 также видно, что при $\psi, C = (\psi, C)_{cr}$ плотность обращается в бесконечность. С точки зрения формул это следует из выражений (8), (10) и из того, что при $\psi'(\chi) = 0$ числитель в интеграле (10) также равен нулю.

4. Проведенное рассмотрение показывает, что спиральный узор есть особый, присущий газовому диску в симметричном внешнем поле, вид нелинейных волн. Это опровергает устоявшееся мнение, что для поддержания спирального узора нужен постоянный генератор пониженной симметрии (бар [12], галактика-спутник [13]). Предсказывается логарифмическая форма спиралей, что согласуется с наблюдениями ([13], рис.1). Получена связь скорости вращения спирального узора с числом рукавов и угловой скоростью движения газа (формула (5)). Например, для $m = -2$ получаем $|\omega| = 4\Omega_0$, что на фоне рис.1 выглядит достаточно разумным. В связи с этим настоящая модель, видимо, является наиболее подходящей для областей диска галактики вне коротационной окружности. Объясняется часто наблюдаемое [4] наличие в спиральном узоре величины флуктуации плотности, бо́льшей, чем флуктуация поля скоростей. Область, где находится резкий пик функции $\theta_\sigma(\psi)$ при $C \to C_{cr}$, логично связать с узкой областью активного звездообразования в спиральном рукаве. Построенная модель приводит к возникновению опрокидывания для волн достаточно большой амплитуды, что может служить одним из механизмов возникновения галактических ударных волн. Видимо, тот факт, что найденное решение является солитоном в смысле работы [8], приводит к его устойчивости, однако мы считаем, что это утверждение требует детальной проверки.

Мы глубоко благодарны Д.П. Барсукову, Д.А. Варшаловичу, А.П. Дмитриеву, Д.А. Зюзину, А.В. Иванчику, В.Ю. Качоровскому, С.Г. Полтораку, Е.В. Поляченко, С.А. Родионову, Д.С. Свинкину, А.В. Хоперскову, Д.Г. Яковлеву, И.Н. Яссиевич за полезные и многочисленные обсуждения, а также А.П. Алексеевой, А.Ю. Зюзину, А.А. Прокофьеву за чтение рукописи и советы по ее улучшению. Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 08-02-00837, гранта поддержки ведущих научных школ России # НШ-2600.2008.2 и гранта фонда "Династия".

1. B. Lindblad and R. G. Langebartel, Stockholm Obs. Ann. **17**, 6 (1953).
2. C. C. Lin and F. H. Shu, Appl. J. **140**, L646 (1964); C. C. Lin, C. Yuan, and F. H. Shu, Astrophys. J. **155**, L721 (1969).
3. A. Toomre, Astrophys. J. **158**, 899T (1969).
4. А. М. Фридман, УФН **177**, 121 (2007).
5. M. Kamionkowski, arXiv:astro-ph/0706.2986 v1 (20 Jun 2007); L. Bergstrom, Rep. Prog. Phys. **63**, 793 (2000).
6. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, М.: Наука, 1975, с. 386-449.
7. W. W. Roberts, Astrophys. J. **158**, 123 (1969).
8. А. Б. Михайловский, В. И. Петвиашвили, А. М. Фридман, Письма в ЖЭТФ **26**, 129 (1977).
9. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, М.: Наука, 1976, с. 330–336, с. 365–410.
10. А. М. Фридман, ЖЭТФ **98**, 1121 (1990).
11. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, М.: Наука, 1980, с. 112–186.
12. K. Wada and C. A. Norman, Astrophys. J. **547**, 172 (2001); K. Wada, G. Meurer, and C. A. Norman, Astrophys. J. **577**, 197 (2002).
13. Ю. Н. Ефремов, *Лекция "Звездные комплексы и спиральные рукава"*, Школа молодых ученых *"Физика Галактик"*, САО РАН, сентябрь 2007.