© 1990 г.

Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 7, стр. 343 – 346 10 апреля 1990 г.

ДВУХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

И.Л.Бухбиндер, С.Д.Одинцов, О.А.Фонарев

Впервые проведено вычисление двухпетлевого эффективного действия в многомерной квантовой гравитации на фоне $M_N \times T_K$, где M_N – N-мерное пространство Минковского, а T_K – K-мерный тор.

Квантовые теории Калузы–Клейна представляют собой нетривиальные физические модели в которых гравитационное взаимодействие проявляет себя на квантовом уровне (см., например, [1]). Центральным объектом этих теорий является эффективное действие (ЭД), с помощью которого изучается проблема спонтанной компактификации с учетом квантово-гравитационных эффектов.

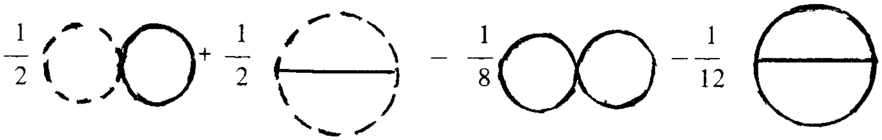
К настоящему времени все известные вычисления ЭД в квантовых теориях Калузы–Клейна проведены только в однопетлевом приближении. Выход за рамки однопетлевого приближения в квантовой гравитации затрудняется, во-первых, в силу значительной сложности алгебраических преобразований и, во-вторых, из-за необходимости развить новую методику вычислений, так как теперь задача уже не сводится к ставшему привычным выражению $\ln\det(\Box + P)$. Как будет показано ниже в рамках квантовых теорий Калузы–Клейна обе эти трудности можно преодолеть.

Предлагаемая работа посвящена вычислению двухпетлевого ЭД в многомерной эйнштейновской квантовой гравитации на фоне $M_N \times T_K$, $d = N + K \geqslant 4$. Действие рассматриваемой теории с учетом калибровки и гостов имеет вид

$$S = \int d^{N+K} x \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{|g|} R + \frac{1}{2\kappa^2} \chi_A \bar{g}^{AB} \chi_B + \sqrt{|\bar{g}|}\, \bar{c}^A \chi_A{}^{CE} D_{CE}{}^B [\bar{g} + \kappa h]\, c_B \right\}. \tag{1}$$

Здесь $g_{AB} = \bar{g}_{AB} + \kappa h_{AB}$, $\bar{g}_{AB}$ – фоновая метрика, отвечающая $M_N \times T_K$, h_{AB} – квантованное гравитационное поле, $\chi_A \equiv \chi_A{}^{BC} h_{BC} = \kappa (\delta_A^{(B} \bar{\nabla}^{c)} - \frac{1}{2} \bar{g}^{BC} \bar{\nabla}_A) h_{BC}$, $D_{CE}{}^B[g] = 2\delta_{(C}{}^B \nabla_{E)}$ $\bar{c}^A$, c_B – гостовские поля, $\bar{\nabla}_A$ – ковариантная производная, построенная по фоновой метрике. Остальные обозначения стандартны.

Двухпетлевые диаграммы дающие вклад в ЭД имеют вид [2]:



(2)

Из структуры пропагаторов (3) следует, что при вычислении диаграмм (2) в импульсном представлении с каждой вершиной связано не только интегрирование по непрерывным импульсам p_α, но и суммирование по $n_1, n_2, \ldots, n_K$.

Очевидно, что явное вычисление диаграмм (2) предполагает регуляризацию. Известно, что для однопетлевых расчетов в квантовых теориях Калузы–Клейна удобной оказывается дзета–регуляризация. Ее естественным продолжением на многопетлевой случай является обобщенная операторная регуляризация (см., например, [3]). Именно она использовалась нами для вычисления интегралов по импульсам.

Приведем теперь результаты вычислений. Представим ЭД в виде $\Gamma = \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \ldots$ Тогда двухпетлевой вклад $\Gamma^{(2)}$ в ЭД имеет вид $\Gamma^{(2)} = \int d^N x\, V^{(2)}$. Выражение $V^{(2)}$ записывается для нечетных и четных N в форме:

$$1.\quad N = 2\omega + 1, \quad V^{(2)} = \frac{\kappa^2 \pi^{d-2}}{2^{2-K} L_1 L_2 \ldots L_K} \quad Q(d) \left(\frac{2\omega+1}{2}\right)^2 \cdot$$

Здесь сплошная линия отвечает пропагатору гравитона, а пунктирная – пропагатору гостов. Вершины в диаграммах получаются путем разложения действия (1) до четвертого порядка включительно по квантовым полям h_{AB}; выражения для них здесь не приводятся. Пропагаторы гравитонов и гостов записываются в форме:

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{L_1 L_2 \ldots L_K} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_K=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} e^{ip_A (x_1^A - x_2^A)}\, G(p).$$

Здесь $p_A \equiv (p_\alpha, \frac{2\pi}{L_a} n_a)$; $\alpha = 0, 1, \ldots, N-1$; $a = 1, 2, \ldots, K$; $L_a = 2\pi R_a$ R_a – радиус тора $G(p)$ – есть либо пропагатор гравитонов $G_{A_1 B_1}{}^{A_2 B_2}$ либо пропагатор гостов $G_A{}^B$:

$$G_{A_1 B_1}{}^{A_2 B_2}(p) = -\frac{4P_{A_1 B_1}{}^{A_2 B_2}}{p^2}, \qquad G_A{}^B(p) = \frac{\delta_A^B}{p^2} \tag{3}$$

$$P_{A_1 B_1, A_2 B_2} = \bar{g}_{A_1 (A_2} \bar{g}_{B_2) B_1} - \frac{1}{d-2} \bar{g}_{A_1 A_2} \bar{g}_{B_1 B_2}, \qquad p^2 = p_\alpha p^\alpha - \sum_{a=1}^{K} \left(\frac{2\pi}{L_a} n_a\right)^2.$$

$$\cdot\ \Gamma^2\left(-\frac{2\omega+1}{2}\right) \left[\zeta_K\left(-\omega - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \omega\right) + \zeta_K\left(\frac{1}{2} - \omega, -\omega - \frac{1}{2}\right) - \eta_K\left(\frac{1}{2} - \omega, \frac{1}{2} - \omega\right)\right] \tag{4}$$

Здесь

$$\zeta_K(a,b) = \sum_{n_1,\ldots,n_K,m_1,\ldots,m_K=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\frac{n_1}{L_1})^2+\ldots+(\frac{n_K}{L_K})^2]^a[(\frac{n_1+m_1}{L_1})^2+\ldots+(\frac{n_K+m_K}{L_K})^2]^b}$$

$\eta_K(a,b)$ отличается от $\zeta_K(a,b)$ наличием множителя $[(m_1/L_1)^2+\ldots.+(m_K/L_K)^2]$ в числителе. При $a, b \leqslant 1$ функции $\zeta_K(a,b)$, $\eta_K(a,b)$ понимаются в смысле аналитического продолжения и могут быть явно вычислены с помощью дзета-регуляризации (см., например, [4]). Выражение для $Q(d)$ входящее в (4) имеет вид

$$Q(d) = \frac{\lambda^2}{9}\left[\frac{d^6}{32} - \frac{d^5}{16} + \frac{41d^4}{32} - \frac{19d^3}{2} + \frac{77d^2}{4} - 15d + \frac{9}{2}\right] +$$
9

$$+ \frac{\lambda^2}{27}\left[-\frac{27d^5}{32} + \frac{219d^4}{16} - \frac{2739d^3}{32} + \frac{827d^2}{4} - \frac{573d}{4} + \frac{27}{4}\right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{27}\left[\frac{129d^4}{32} - \frac{1395d^3}{8} + \frac{81d^2}{16} - \frac{1503d}{8} + \frac{1059}{4}\right] +$$

$$+ \frac{1}{27}\left[-\frac{129d^3}{16} + \frac{123d^2}{16} - \frac{957d}{8} + 174\right], \qquad \lambda = \frac{2}{d-2}$$

2. $N = 2\omega$, $\quad V^{(2)} = \dfrac{\kappa^2\pi^{d-2}}{2^{3-K}[(\omega-1)!]^2 L_1L_2\ldots L_K} Q(d) \cdot$

$$\cdot \{ [16\ln^2(\frac{\mu}{2\pi}) + 16(\frac{1}{2\omega} + \sum_{l=1}^{\omega-1}\frac{1}{l})\ln(\frac{\mu}{2\pi}) + 2(\frac{1}{2\omega^2} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\omega-1}\frac{1}{l^2})(1 + \frac{1}{\omega^2} + 2\sum_{S=1}^{\omega-1}\frac{1}{S^2})][\zeta_K(-\omega, 1-\omega) + \zeta_K(1-\omega, -\omega) -$$

$$- \eta_K(1-\omega, 1-\omega)] + [8\ln(\frac{\mu}{2\pi}) + 4(\frac{1}{2\omega} + \sum_{l=1}^{\omega-1}\frac{1}{l})[\zeta'_K(-\omega, 1-\omega] +$$

$$+ \zeta''_K(1-\omega, -\omega) - \eta'_K(1-\omega, 1-\omega) + \frac{1}{\omega}\eta_K(1-\omega, 1-\omega)] +$$

$$+ \zeta''_K(1-\omega, -\omega) - \eta'_K(1-\omega, 1-\omega) - \frac{1}{\omega}\eta_K(1-\omega, 1-\omega)\}. \qquad (6)$$

Здесь μ – произвольный параметр размерности массы,

$$\zeta_K^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\zeta_K(a+\alpha, b+\alpha)|_{\alpha=0} \cdot$$

Аналогично определяется $\eta_K^{(n)}(a,b)$. Заметим, что на рассматриевом фоне $\Gamma^{(0)} = 0$, а $\Gamma^{(1)}$ приведено в обзоре [1]. В силу согласованности фона с уравнениями движения ЭД не зависит от калибровки.

Рассмотрим случай $N=4$, $K=1$. С учетом двухпетлевых вкладов эффективный потенциал

$$V = \frac{a_1}{L^4} + \frac{\kappa^2}{L^7}\left(a_2 \ln^2 \frac{\mu L}{2\pi} + a_3 \ln \frac{\mu L}{2\pi} + a_4\right),$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – константы. Условие обращения в ноль индуцированной космологической постоянной $V=0$ выступает как условие нормировки. Можно показать, что с учетом $V = 0$ уравнение движения $\partial V/\partial L = 0$ имеет решение, определяющее радиус компактификации L. Заметим, что в однопетлевом приближении система уравнений $V=0$, $\partial V/\partial L = 0$ не совместна [5] и необходимо учитывать затравочный Λ-член. Таким образом с учетом двухпетлевого приближения пятимерная эйнштейновская гравитация без затравочного Λ-члена обеспечивает спонтанную компактификацию.

Литература

1. *Buchbinder I.L., Odintsov S.D.* Fortschr. Phys., 1989, **37**, 225.
2. *Де Витт Б.С.* Динамическая теория групп и полей, 1987, М., Наука.
3. *Mann R.B. et al.* Nucl. Phys. B, 1988 /89, **311**, 630.
4. *Dowker J.S., Banach R.* J. Phys., A, 1978, **11**, 2255.
5. *Appelquist T., Chodos A.* Phys. Rev. D, 1983, **28**, 772.

Поступила в редакцию
5 марта 1990 г.

Томский педагогический институт