Письма в ЖЭТФ, том 91, вып. 2, с. 68 – 71

О вероятности возникновения волн-убийц

В. Е. Захаров[1], *Р. В. Шамин*[1]

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997 Москва, Россия

Department of Mathematics, University of Arizona, 857201 Tucson, USA

Поступила в редакцию 14 декабря 2009 г.

Изучается статистика возникновения волн-убийц на поверхности идеальной тяжелой жидкости. Волны-убийцы (экстремальные волны) возникают в процессе эволюции статистически однородных начальных условий с гауссовым распределением вероятности при вариации средних крутизн от малых ($\mu^2 = 1.54 \cdot 10^{-3}$) до умеренных ($\mu^2 = 3.08 \cdot 10^{-3}$). Частоты возникновения экстремальных волн уменьшаются с ростом спектральной ширины начальных условий, однако и для широких пакетов ($A_k/k \sim 1$) остается значительной.

Сегодня уже несомненно, что волны-убийцы (экстремальные волны) закономерно возникают в результате эволюции спектрально узких пакетов гравитационных волн (см., например, [1 – 8]). Можно сказать, что волны-убийцы есть нелинейная стадия модуляционной неустойчивости.

В настоящей статье представлены результаты по количественному исследованию этого эффекта. Мы решали численно уравнения Эйлера, описывающие глубокую идеальную жидкость со свободной поверхностью в двумерной геометрии $0 < x < 2\pi$, $-\infty < y < \eta(x)$. Граничные условия на концах интервала $x = 0, 2\pi$ предполагались периодическими.

Течение предполагалось потенциальным, а жидкость несжимаемой,

$$v = \nabla\phi, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

так что потенциал подчинялся уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0.$$

Мы осуществляли конформное отображение области, занятой жидкостью, на нижнюю полуплоскость, координаты на которой $w = u + iv$. Отображение задается функцией $z = z(w)$, $z = x + iy$.

Динамические уравнения формулируются для переменных Дьяченко

$$R = \frac{1}{z'_w} \quad V = i\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

и имеют вид

$$\begin{gathered} R_t(u,t) = i(UR_u - U_uR), \\ V_t(u,t) = i(UV_u - B_uR) + g(R-1), \\ U = P(VR^* + RV^*), \\ B = P(VV^*), \end{gathered} \tag{1}$$

где P – оператор проектирования на нижнюю полуплоскость, $P = \frac{1}{2}(1+iH)$, H – аналог оператора Гильберта для периодического случая

$$H[f](y) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_0^{2\pi} \frac{f(u')}{\tan(\frac{u'-u}{2})} du'.$$

Система (1) в настоящее время широко используется. Строгие математические результаты о разрешимости системы (1), а также описание методов ее численного решения приведены в работах [9 – 12].

В наших экспериментах начальные условия определялись как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K_0 = 25$. Мы предполагали, что начальное возмущение поверхности задается суммой гармоник со случайными фазами

$$\eta_0(x) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{\max}}^{\frac{1}{2}K_{\max}} \phi(k-k_0)\cos(kx - \xi_k). \tag{2}$$

Здесь $K_{\max}$ – полное число спектральных мод, ξ_k – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$.

Начальные значения поля скоростей предполагались связанными с (2) формулами линейной теории. Конформное преобразование осуществлялось при помощи итерационного алгоритма, предложенного А.И. Дьяченко и детально описанного в [10].

[1]e-mail: zakharov@math.arizona.edu, roman@shamin.ru

Функция $\phi(k)$ определялась по формуле

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \le K_w. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь δ_k – независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$. Число $1 \le K_w \le 10$ определяло спектральную ширину; κ, α – "внутренние" параметры спектра, определенные так, чтобы "внешние" параметры – средняя крутизна μ,

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx,$$

и дисперсия D,

$$D = \left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk\right)\left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk\right)^{-1},$$

принимали заданные значения. Далее, мы вычисляли точные значения полной энергии E и следили за тем, чтобы вклад в нее случайного шума составлял не более трех процентов. Было проделано 5000 "элементарных" экспериментов. В каждом эксперименте время менялось в интервале $0 < t < 200$, что соответствовало приблизительно 500 периодам волн. Если происходило обрушение волн, счет прекращался досрочно. В расчетах полное число гармоник было $K_{\max} = 2048$ или $K_{\max} = 4096$ в зависимости от полной энергии, которая менялась в пределах $1.5 \cdot 10^{-4} \le E \le 4 \cdot 10^{-4}$.

Регистрация волн-убийц производилась следующим образом. После окончания элементарного эксперимента рассчитывалась величина ν:

$$\nu = \frac{\max \eta(x,t)}{\langle|\eta|\rangle}.$$

Здесь максимум в числителе берется по координате и по времени за интервал $0 < t < T$,

$$\langle|\eta|\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \max_{x\in(0,2\pi)} |\eta(x,t)| dt.$$

"Волна-убийца" фиксировалась, если параметр ν превышал критическое значение $\nu = 1.8$. Данное определение количественно лишь несущественно отличается от общепринятого, когда считается, что волны-убийцы вдвое превышают существенную высоту (significant wave height) Требовалось также, чтобы локальная крутизна волны $|\eta_x|$ превышала критическое значение $\max\limits_{0<x<2\pi} |\eta_x| \le 0.3$. Это требование вызвано очевидными физическими соображениями и является весьма существенным.

Результаты экспериментов приведены в таблице. По горизонтали отложены значения дисперсии, по вертикали – значения квадрата крутизны. Число «активных» мод начального условия для каждого эксперимента также показано. Из наших данных следует, что даже для волн довольно умеренной крутизны ($\mu^2 \simeq 2.06 \cdot 10^{-3}$, $\mu \simeq 0.045$) образование экстремальной волны за столь короткий отрезок времени как 500 периодов (при периоде 10 с это меньше полутора часов) есть весьма вероятное событие, даже если спектральная ширина по волновым числам сравнима с несущим волновым числом. Собственно, этот эксперимент и подчеркивает "обыденность" экстремальных волн. На рис.1 воспроизведен начальный профиль волны в ходе эволюции которой возникла волна-убийца, профиль которой показан на рис.2. На рис.3 приведена плотность импульса в момент обра-

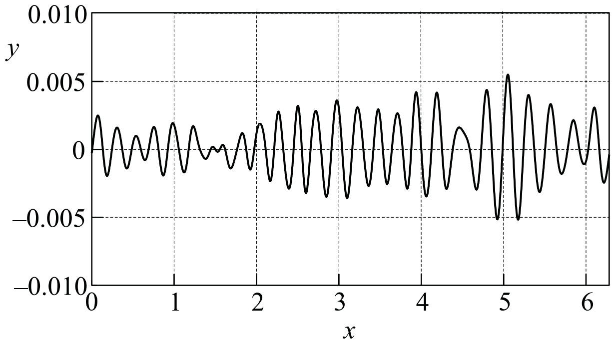

Рис.1. Профиль начальной волны. Средняя крутизна – $\mu^2 = 2.56 \cdot 10^{-3}$, дисперсия $D = 4$

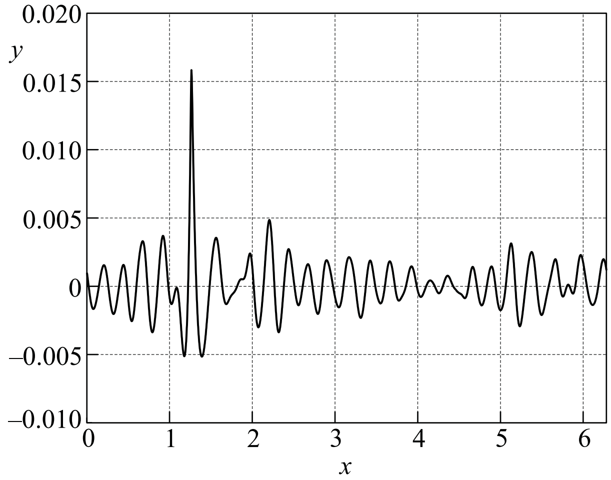

Рис.2. Профиль волны-убийцы. Время $t = 67.2$, параметр $\nu = 2.13$, максимальная крутизна – 0.558

D	$\mu^2 = 1.54 \cdot 10^{-3}$	$\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$	$\mu^2 = 2.56 \cdot 10^{-3}$	$\mu^2 = 3.08 \cdot 10^{-3}$
$D = 0.07$ $K_w = 1$	0.141	0.638	0.828	0.849
$D = 2$ $K_w = 1$	0.152	0.457	0.616	0.554
$D = 4$ $K_w = 2$	0.011	0.231	0.346	0.272
$D = 6$ $K_w = 3$	0.000	0.192	0.305	0.246
$D = 8$ $K_w = 4$	0.011	0.154	0.280	0.195
$D = 10$ $K_w = 5$	0.022	0.125	0.247	0.186
$D = 12$ $K_w = 6$	0.010	0.173	0.256	0.172
$D = 14$ $K_w = 7$	0.000	0.058	0.216	0.170
$D = 16$ $K_w = 8$	0.000	0.136	0.208	0.151
$D = 18$ $K_w = 9$	0.000	0.118	0.219	0.134
$D = 20$ $K_w = 10$	0.034	0.127	0.206	0.099

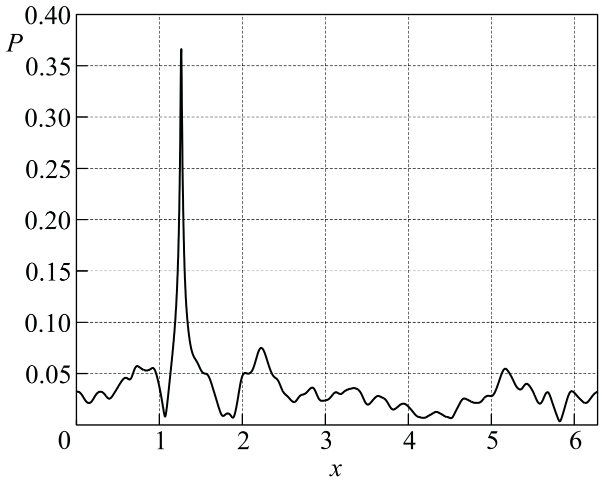

Рис.3. Плотность импульса в момент образования волны-убийцы, приведенной на рис.2

зования этой волны-убийцы. Интересно, что вероятность возникновения экстремальных волн, рассматриваемая как функция от средней крутизны при заданной дисперсии имеет максимум при весьма умеренной крутизне ($\mu^2 = 2.0 \cdot 10^{-3}$), а затем убывает при увеличении крутизны. Этот факт объясняется увеличением силы конкурирующего эффекта – обрушения волн. Использованная нами схема счета позволяет вести эксперимент только до первого обрушения. Мы полагаем, что при использовании более совершенных методик зависимость вероятности возникновения экстремальных волн от крутизны остается монотонной.

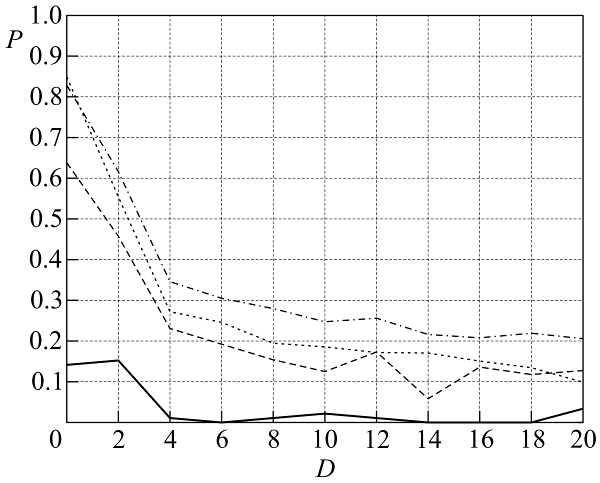

Рис.4. Частоты вероятности возникновения волн-убийц. В зависимости от дисперсии. $\mu^2 = 1.54 \cdot 10^{-3}$ – сплошная линия, $\mu^2 = 2.56 \cdot 10^{-3}$ – "тире", $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$ – точечная линия, $\mu^2 = 3.08 \cdot 10^{-3}$ – "точка-тире"

На рис.4 приведены графики частоты вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от дисперсии.

В заключение авторы благодарят кафедру “Дифференциальные уравнения и математическая физика” РУДН и лично заведующего кафедрой проф. А.Л. Скубачевского, О.В. Савенкову и Д.А. Неверову за предоставленные вычислительные мощности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта # НШ-7550.2006.2, гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 09-05-13605-офи_ц и Программой фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

1. А. А. Куркин, Е. Н. Пелиновский, *Волны-убийцы: факты, теория и моделирование*, Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. университет, 2004, с. 158.
2. K. L. Henderson, D. H. Pelegrine, and J. W. Dold, Wave Motion **29**, 341 (1999).
3. W. J. D. Baterman, C. Swan, and P. H. Taylor, J. Comput. Physics **174**, 277 (2000).
4. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, Eur. J. Mech. B Fluids **21**, 283 (2002).
5. V. E. Zakharov, A. I Dyachenko, and A. O. Prokofiev, Eur. J. Mech. B Fluids **25**, 677 (2006).
6. V. E. Zakharov and A. I. Dyachenko, European J. Mechanics, B Fluids. Published online 5 November 2009.
7. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and A. O. Prokofiev, *Freak waves: Peculiarities of numerical simulations, in “Extreme Ocean Waves”*, Eds. E. Pelinovsky and C. Harif, Springer, 2008.
8. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **88**, 356 (2008).
9. Р. В. Шамин, *Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане*, М.: Наука, 2008, с. 133.
10. R. V. Shamin, J. Mathematical Sciences **160**, 537 (2009).
11. Р. В. Шамин, Доклады Российской академии наук **406**, 112 (2006).
12. Р. В. Шамин, Сибирский журнал вычислительной математики **9**, 379 (2006).