Письма в ЖЭТФ, том 77, вып. 5, с. 292 – 295 © 2003 г. 10 марта

Дробный квантовый эффект Холла, правило Джейна и топологические текстуры

С. В. Иорданский

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 февраля 2003 г.

Показано, что правило Джейна для определения дробей в квантовом эффекте Холла можно получить, не прибегая к феноменологической концепции композитных фермионов. В работе рассматривается возможность топологически нетривиальных волновых многоэлектронных функций, групповая классификация которых указывает на специальные значения электронной плотности для основных состояний отделенных щелью от энергии возбуждений.

PACS: 73.43.–f

Несмотря на то, что с момента экспериментального открытия квантового эффекта Холла (КЭХ) прошло более двадцати лет, теория этого явления остается весьма неполной (см. обзоры [1, 2]). Это относится в первую очередь к дробному квантовому эффекту Холла (ДКЭХ), который требует обязательного учета взаимодействия электронов и никак не объясним (в отличие от целого КЭХ) в рамках одночастичной теории. Наиболее успешное построение вариационной волновой многоэлектронной функции для объяснения дроби $1/3$ принадлежит Лафлину [3, 4]. В этой работе используется приближение экстремально большого магнитного поля, когда можно ограничиться состояниями в пределах нижнего уровня Ландау. Это, однако, не соответствует экспериментальной ситуации, где циклотронная энергия порядка средней энергии межэлектронного взаимодействия. Кроме того имеются трудности при обобщении на другие дроби. Компьютерные расчеты дают весьма грубое приближение для реальных многочастичных функций, так как число частиц в таких расчетах на современных компьютерах не превышает нескольких десятков.

Наиболее успешным феноменологическим описанием является модель "композитных" фермионов Джейна [5, 6], приводящая к правилу Джейна, предсказывающему большую часть наблюдаемых дробей. Согласно этой модели, электроны "одеваются" квантами магнитного потока с магнитным полем, сосредоточенным в бесконечно узкой области вокруг каждого электрона. Предполагается, что четное число квантов потока обеспечивает фермиевский характер таких частиц. Учет этого дополнительного магнитного поля в формализованной теории приводит к так называемому гамильтониану Черна–Саймонса. Подробное изложение такого подхода приведено в [7]. Однако реальные вычисления используют приближение среднего поля, когда эффективное магнитное поле предполагается состоящим из внешнего магнитного поля и дополнительного постоянного магнитного поля, дающего полное число дополнительных квантов магнитного потока на всех имеющихся "композитных" электронах. Именно это и приводит к правилу Джейна для электронных дробных плотностей, соответствующих полному заполнению уровней Ландау в эффективном магнитном поле $\rho_e = (H/\phi_0)(l/(1+2l))$, где предполагается, что имеется (-2) кванта потока ϕ_0 на "композитный" электрон, считая поток внешнего поля положительным и l целое положительное. Эта модель приводит к утверждению, что при $l \to \infty$, $\rho_e \to H/2\phi_0$ эффективное магнитное поле обращается в нуль, и "композитные" фермионы должны вести себя, как обычная 2D ферми-жидкость в отсутствие магнитного поля. Это утверждение позволяет качественно объяснить экспериментально наблюдаемые явления при половинном заполнении уровня Ландау. Попытки усовершенствовать расчеты за пределы среднего поля для гамильтониана Черна–Саймонса показывают многочисленные внутренние трудности такой теории и не привели к вычислению предполагаемых ферми-жидкостных параметров при половинном заполнении уровня Ландау. Обзор работ этого направления может быть найден в статье Б. Гальперина[1)] в сборнике [1]).

Введение бесконечно узкой области вокруг каждого электрона, дающей тем не менее конечный поток "внутреннего" магнитного поля, представляется весьма искусственным. Признание такого свойства

[1)] B.Halperin.

электронов на микроскопическом уровне радикально меняет наши представления об электроне и фактически никак не связано с двумерностью или наличием внешнего магнитного поля.

Однако построение теории ДКЭХ возможно, по-видимому, на другой физической основе, связанной с существованием топологических текстур, устойчивых относительно конечных деформаций. Топологическая классификация многочастичных волновых функций является довольно сложной математической проблемой и, насколько мне известно, простое и эффективное определение топологических классов отсутствует. Имеется хорошо разработанный пример классификации топологических возбуждений в ферромагнитном 2D электронном газе в сильном магнитном поле при заполнении $\nu = 1$, называемых скирмионами [8, 9]. При построении теории можно произвести каноническое преобразование электронных спиноров $\psi(\mathbf{r})$ в каждой точке, вводя новые спиноры $\chi(\mathbf{r})$ согласно

$$\psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r}), \qquad \psi^+(\mathbf{r}) = \chi^+ U^+(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где U – матрица поворота, зависящая от трех углов Эйлера, например, $U = U_z(\alpha)U_y(\beta)U_z(\gamma)$,(индексами обозначены поворотные оси). После канонического преобразования лагранжиан взаимодействующих электронов принимает вид (в системе единиц, где $l_H = 1$, $H = 1$, $\hbar = 1/2$)

$$L = \int\left\{i\chi^+\,\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\chi^+(-i\boldsymbol{\nabla} + \mathbf{A}_0 + \hat{\Omega})^2\chi\right\}d^2r + \\ + \frac{1}{2}\int V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\chi^+(\mathbf{r})\chi^+(\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r})d^2r\; d^2r', \tag{2}$$

где

$$\hat{\Omega} = -iU^+\boldsymbol{\nabla}U = \boldsymbol{\Omega}^l\sigma_l,$$

σ_l – матрицы Паули,

$$\boldsymbol{\Omega}^z = \frac{1}{2}(1+\cos\beta)\boldsymbol{\nabla}\alpha,$$

$$\boldsymbol{\Omega}^x = \frac{1}{2}(\sin\beta\;\cos\alpha\boldsymbol{\nabla}\alpha - \sin\alpha\boldsymbol{\nabla}\beta),$$

$$\boldsymbol{\Omega}^y = \frac{1}{2}(\sin\beta\;\sin\alpha\boldsymbol{\nabla}\alpha + \cos\alpha\boldsymbol{\nabla}\beta)$$

и $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ – кулоновское взаимодействие. Мы положили $\gamma = \alpha$, так как угол γ играет вспомогательную роль, однако его наличие существенно для отсутствия особенностей у матрицы U. Спиноры ψ, ψ^+ являются полевыми операторами электронного поля и удовлетворяют правилам коммутации для ферми-операторов. Легко проверить, что χ^+, χ будут удовлетворять тем же правилам коммутации. Новый лагранжиан формально эквивалентен исходному с $\Omega \equiv 0$. Поэтому среди электронных состояний для этого лагранжиана есть и состояния, соответствующие $\Omega \equiv 0$, так как всегда можно совершить обратное преобразование. Однако можно попытаться найти какие-то другие новые состояния, характерные для лагранжиана с $\Omega \neq 0$. Такая программа может быть успешно проведена в случае, когда U мало меняется на расстояниях порядка магнитной длины $l_H^2 = \frac{eH}{\hbar c}$ (H – внешнее магнитное поле) и все $\boldsymbol{\Omega}^l$ малы. На больших расстояниях $\beta = 0$, так что матрица U только поворачивает спиноры вокруг оси z, за которую принято направление спинов в однородном ферромагнетике, сообщая им нетривиальную фазу. Искомое электронное состояние с операторами χ, χ^+ можно получить по теории возмущений по Ω из однородного ферромагнитного состояния для операторов χ. Нетривиальным топологическим требованием будет существование топологического числа

$$K = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{rot}\boldsymbol{\Omega}^z\; d^2r,$$

определяемого вихревым числом оборотов угла $\alpha(\mathbf{r})$ при обходе бесконечно удаленного контура. Именно это обстоятельство ($K \neq 0$) определяет топологический класс волновой функции и невозможность деформации волновой функции в тривиальное ферромагнитное состояние, когда спиноры ψ имеют всюду одинаковое направление. Таким образом, $\hat{\Omega}$ с разными K характеризуют топологически различные классы волновых многочастичных функций. Отсутствие особенностей у $\hat{\Omega}$ гарантируется условием $\beta = \pi$ в точке особенности угла $\alpha(\mathbf{r})$ (типа полярного угла). Такой подход был предложен в работе [10], вычисления различных физических величин в главном порядке были проведены в [11, 12]. Результаты находятся в соответствии с полученными ранее другим способом (см. [7, 8]). Величина $\mathrm{rot}\boldsymbol{\Omega}^z$ играет роль дополнительного эффективного магнитного поля, причем это поле является коллективным свойством многочастичной волновой функции, а не атрибутом отдельного электрона. Программа вычислений различных величин: электронной плотности, энергии, спиновой плотности может быть проведена в принципе до любого порядка по градиентам матрицы U.

Этот пример дает способ нахождения изолированных топологических возбуждений. Можно, однако, расширить эту конструкцию для рассмотрения текстуры и многочастичной волновой функции, соответствующей конечной плотности топологического числа K на плоскости. Рассмотрение произвольных текстур подобного рода для $\hat{\Omega}$ вызывает большие методические трудности и, по-видимому, не имеет прямого отношения к классификации основных состояний. Поэтому мы предположим, что эти текстуры являются почти периодическими, так что поле среднего спина является периодическим. Рассмотрим элементарную ячейку. Будем считать, что на границе элементарной ячейки вектор среднего спина имеет постоянное значение и его направление совпадает с осью z в спиновом пространстве. Таким образом, угол β будем считать периодической функцией на плоскости, принимающей значение $\beta = 0$ на границах элементарных ячеек. Угол α будем считать имеющим вихревую особенность в некоторой внутренней точке каждой элементарной ячейки, в которой положим $\beta = \pi$ для устранения особенностей $\hat{\Omega}(r)$. Можно считать, например, что $\alpha = \sum \alpha_i(r)$, где суммирование происходит по всем элементарным ячейкам, и $\alpha_i(r)$ – полярный угол с центром внутри ячейки i. Таким образом, каждая ячейка характеризуется одним и тем же топологическим числом

$$K = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma} \mathrm{rot}\Omega^z d^2 r,$$

дающим целое число квантов дополнительного “эффективного” магнитного поля, имеющего среднее по площади образца $H_{\mathrm{eff}} = \frac{K}{\sigma}$, где σ – площадь элементарной ячейки. Если принять, как главное приближение, ферромагнитные χ, χ^+, то средний спин $\mathbf{n}(r)$ будет давать K кратное отображение любой элементарной ячейки на сферу направлений. Формально сумма по всем ячейкам $\alpha = \sum \alpha_i$ является периодической функцией,однако она расходится. В выражение для $\hat{\Omega}$ входит только $\sin\alpha, \cos\alpha$, так что достаточно сходимости по $mod 2\pi$. Я приму без доказательства, что либо такая сходимость существует, либо $\Omega^{x,y}$ могут быть регуляризованы периодическим образом.

Предложенная конструкция вихрей без особенности в коре и имеющих конечную энергию (регулярные $\mathbf{\Omega}^l$) не является единственной. Например, при отсутствии свободных спинов (большая величина g-фактора) можно рассмотреть два уровня размерного квантования(для движения в направлении перпендикулярном 2D плоскости) и ввести соответствующий изоспин, после чего мы получим аналогичную конструкцию для изоспина, однако с другими постоянными.

Я не буду заниматься вычислением энергии электронов в таких текстурах, что является достаточно сложной проблемой при размерах ячейки порядка магнитной длины, когда отсутствует возможность градиентного разложения по Ω. Нашей целью является классификация электронных состояний с целью выделения некоторых специальных значений плотности, соответствующих возможности основных состояний, отделенных щелью от возбужденных. Задача о вычислении щели может рассматриваться численно, после классификации основных состояний.

Фактически мы имеем систему взаимодействующих электронов, находящихся в периодическом эффективном магнитном поле (сумма внешнего магнитного поля и периодического магнитного поля вихрей в элементарных ячейках) с ненулевым средним значением. Группа преобразований состоит из магнитных трансляций, дающих проективное представление группы обычных трансляций. Согласно известному анализу (Brown, Zak, см., например, [13]) для невзаимодействующих электронов, регулярный зонный спектр имеется только в случае рационального числа квантов потока. Иррациональное число квантов потока, или рациональные числа с большими несократимыми числителями и знаменателями $\frac{p}{q}\phi_0$ приводят к чрезвычайно нерегулярной структуре с разрешенными и запрещенными зонами, густо расположенными в некоторой области энергий. Можно предположить в духе теории ферми-жидкости, что взаимодействие сохраняет эти особенности спектра. Если ограничиться простейшими дробями, когда поток эффективного поля через элементарную ячейку $(H\sigma + K\phi_0) = \phi_0/l$, где l – целое, то площадь элементарной ячейки $\sigma = (1 - Kl)\phi_0/lH$.

Полное число состояний на единицу площади, соответствующее одному электрону на элементарную ячейку, дает плотность электронов $\rho = Hl/\phi_0(l - Kl)$, и должно отвечать полному заполнению совокупности зон, получающихся из S/σ состояний без магнитного поля, но в периодическом потенциале с периодом, задаваемым элементарной ячейкой. Здесь S площадь образца. Согласно элементарному анализу [13], эта первоначальная зона разбивается на l подзон, каждая из которых l (нечетные l) или $l/2$ (четные) кратно вырождена; доля числа состояний в каждой подзоне $1/l^2$ (нечетные l) или $2/l^2$ (четные l). Однако полное число состояний во всех подзонах равно S/σ. Можно предположить, что эти состояния будут отделены наибольшей щелью от более высоких по энергии и с учетом взаимодействия. Структура внутренних запрещенных зон мало существенна, постольку поскольку все нижние состояния уже заняты. Отметим, что четность или нечетность числа K не играет роли, так как в отличие от модели композитных фермионов коммутационные фермиевские соотношения для операторов χ, χ^+ выполняются автоматически и никак не связаны со значениями топологического числа K. Выделение каких-то специфических чисел квантов потока вихревого поля может быть связано с энергией основного состояния. Если предположить, что $K = -2$ наиболее выгодно энергетически и соответствует наибольшим щелям, то мы получим правило Джейна $\rho = Hl/\phi_0(1+2l)$, причем заполнение половины состояний уровня Ландау во внешнем поле $\rho = H/2\phi_0$ соответствует исчезающему эффективному магнитному полю (на элементарную ячейку нуль квантов потока).

Таким образом, мы воспроизвели основное утверждение теории композитных фермионов. Конечно, эти результаты являются весьма грубыми и до некоторой степени гипотетическими. Величина щели, свойства элементарных зарядовых возбуждений и вычисление проводимости, а также рассмотрение различных K и l остаются полностью открытыми вопросами и подход к этим проблемам пока не ясен. Привлекательным в настоящем подходе, однако, является то, что мы оставались в рамках существующих физических представлений без привлечения кардинальных гипотез о свойствах электронов.

Настоящая работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 01-02-17520, а также программой поддержки научных школ и госконтрактом 40.020.1.1.1165 Минпромнауки РФ.

Автор выражает благодарность В. Г. Долгополову, В. Ф. Гантмахеру, В. Б. Тимофееву и М. В. Фейгельману за полезное обсуждение.

1. *Квантовый эффект Холла*, под редакцией Р. Пренджа и С. Гирвина, М.: Мир, 1989. *The Quantum Hall effect*, Eds. R. Prange, S. Girwin, Springer, 1987.
2. *New Perspectioves in Quantum Hall Effects*, Eds. S. Das Sarma and A. Pinozuk, John Willey and Sons, 1997.
3. R. B. Laughlin, Phys. Rev. **B22**, 5632 (1981).
4. R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
5. J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).
6. J. K. Jain, Phys. Rev. **B41**, 7653 (1990).
7. B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, Phys. Rev. **B47**,7312 (1993).
8. S. Sondhi, A. Kahlrede, S. Kivelson, and E. Rezayi, Phys. Rev. **47**, 16418 (1993).
9. K. Moon, N. Mori, Kun Yung et al., Phys. Rev. **B51**, 5138 (1995).
10. С. В. Иорданский, С. Г. Плясунов, Письма ЖЭТФ **65**, 248 (1997).
11. С. В. Иорданский, С. Г. Плясунов, И. В. Фалько, ЖЭТФ **115**, 716 (1999); JETP **88**, 392 (1999).
12. С. В. Иорданский, А. Б. Кашуба, cond-mat/10211214,to appear Phys. Rev. **B**, 15 March 2003.
13. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика IX, Статистическая физика*, часть 2, М.: Наука, 1972.