

Полумикроскопическая модель для эффективного спаривательного взаимодействия в атомных ядрах

С. С. Панкратов^{*+}, М. Балдо[∇], М. В. Зверев^{*+}, У. Ломбардо[□], Э. Е. Саперштейн^{*1)}

^{*}Российский научный центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

⁺Московский физико-технический институт, 123098 Москва, Россия

[∇]Национальный институт ядерной физики, I-95125 Отделение г. Катания, Италия

[□]Национальный институт ядерной физики, Национальная лаборатория Юга; I-95125 Университет г. Катания, Италия

Поступила в редакцию 8 июня 2010 г.

Предлагается модель, в которой рассчитанное из первых принципов эффективное спаривательное взаимодействие в атомных ядрах дополняется небольшим феноменологическим слагаемым, содержащим один параметр, универсальный для всех средних и тяжелых ядер. Выполнены расчеты спаривательной щели нейтронов и протонов для нескольких цепочек полумагических ядер, демонстрирующие успешность этой модели.

Наметившийся в последние годы прогресс в микроскопической теории спаривания нуклонов в атомных ядрах выявил трудности полностью первопринципного подхода к проблеме. Поскольку последовательной микроскопической теории тяжелых и средних ядер пока не существует, приходится говорить о последовательных шагах в этом направлении. Первый шаг на этом пути – решение уравнения теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) для щели со свободным NN -потенциалом в качестве спаривательного взаимодействия. Уже на этом шаге возникли противоречия между результатами миланской группы [1–3], с одной стороны, и Дуге с соавторами [4, 5] – с другой, при том, что оба расчета, на первый взгляд, делались в близких предположениях. В частности, при решении уравнения для щели применялся одинаковый одночастичный спектр с эффективной массой $m^*(r)$, полученный методом Сфирма–Хартри–Фока (СХФ) с эффективными силами $SLy4$. В работе [3] для среднего значения щели Δ в ядре ^{120}Sn (реперном для проблемы спаривания) получено $\Delta \simeq 1.0$ МэВ, что заметно меньше экспериментального значения $\Delta_{\text{exp}} \simeq 1.3$ МэВ, а в [4] для того же ядра получено заметно большее значение $\Delta \simeq 1.6$ МэВ. В первом случае недостача в величине Δ объяснялась многотельными поправками к теории БКШ, главные из которых – обмен виртуальными низколежащими поверхностными колебаниями (“фононами”), который (см., например, [2, 6]) увеличивает величину Δ , приближая ее к экспериментальному результату. В то же время трудно придумать, как уменьшить величину Δ , полученную в [4].

В работах [7, 8] мы проанализировали причины этих противоречий и возможности их однозначного устранения. Обсуждалась эта проблема и в [5]. Оказалось, что результативно два обсуждаемых расчета различаются методом учета эффективной массы. Для разъяснения этого пункта рассмотрим общий вид уравнения теории многих тел для спаривательной щели Δ [9]:

$$\Delta = \mathcal{U}GG^s\Delta. \quad (1)$$

Здесь \mathcal{U} – неприводимый в канале двух частиц блок NN -взаимодействия, а G и G^s – одночастичные функции Грина соответственно в нормальной и сверхтекучей системах. Символическое умножение, как обычно, означает интегрирование по энергии и промежуточным координатам, а также суммирование по спиновым переменным. Употребляя термин “теория БКШ”, мы подразумеваем замену в (1) блока \mathcal{U} на свободный NN -потенциал \mathcal{V} , а также использование простых квазичастичных функций Грина для G и G^s . Тогда уравнение (1) упрощается и приводится к принятому в методе Боголюбова виду:

$$\Delta = -\mathcal{V}\varkappa, \quad (2)$$

где аномальная матрица плотности $\varkappa = \int d\varepsilon GG^s\Delta/2\pi i$ может быть выражена явно через функции u и v :

$$\varkappa(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_i u_i(\mathbf{r}_1)v_i(\mathbf{r}_2), \quad (3)$$

которые подчиняются системе уравнений Боголюбова. Суммирование в (3) выполняется по полной системе боголюбовских функций с собственными энергиями $E_i > 0$.

¹⁾e-mail: saper@mbslab.kiae.ru

В работе [3] система уравнений Боголюбова в сочетании с уравнением (1) для щели с реалистическим аргонским NN -взаимодействием v_{14} решалась напрямую в базисе состояний $\{\lambda\}$, ограниченных фиксированной энергией $E_{\max} = 800$ МэВ. При этом, как отмечалось выше, использовался СХФ базис для сил $SLy4$ с зависящей от координат эффективной массой $m^*(r)$, существенно меньшей массы m свободного нуклона. Трудность применения такого прямого метода решения проблемы ядерного спаривания связана с медленной сходимостью в уравнении для щели Δ сумм по промежуточным состояниям λ . Видимо, именно по этой причине в [1–3] авторы ограничились одним ядром ^{120}Sn . Чтобы преодолеть плохую сходимость, авторы работ [4, 5] использовали “мягкие” силы $V_{\text{low-}k}$ [10], которые определены так, чтобы описывать фазы NN -рассеяния при импульсах $k < \Lambda$, где Λ – заданный параметр, не превышающий значения, отвечающего предельной энергии $E_{\text{lim}} = 300$ МэВ, до которой фазы NN -рассеяния известны достаточно точно. При этом силы $V_{\text{low-}k}$ падают очень быстро при $k > \Lambda$, так что в уравнении для щели (2) можно ограничиться $E_{\max} \simeq 300$ МэВ. Это позволило в [4] рассчитать спаривательную щель нейтронов и протонов для большого числа ядер. Мягкие силы обычно рассчитываются, исходя из какого-либо реалистического NN -потенциала \mathcal{V} с помощью уравнения ренорм-группы, при этом, как показано в [10], результат практически не зависит от конкретного выбора \mathcal{V} . К тому же, в [4] потенциал $V_{\text{low-}k}$ находился, исходя из версии аргонского потенциала v_{18} , которая очень мало отличается от используемого в [3] потенциала v_{14} . Так что, действительно, схемы решения уравнения для щели в [4] и [3] очень похожи.

Для преодоления проблем плохой сходимости в уравнении для щели в конечных системах нами был развит двухступенчатый метод, связанный с концепцией эффективного взаимодействия. Первоначально он был разработан для плоского слоя ядерного вещества (см. обзоры [11, 12]), а затем и для конечных ядер [7, 8]. В этом подходе полное гильбертово пространство S проблемы спаривания разбивается явно на модельное подпространство S_0 , включающее одночастичные состояния с энергиями меньше заданной величины E_0 , и дополнительное к нему подпространство S' . Уравнение для щели решается в модельном пространстве:

$$\Delta = V_{\text{eff}} G G^s \Delta|_{S_0}. \quad (4)$$

Вместо блока \mathcal{U} в исходном уравнении (1) теперь в уравнение для щели входит эффективное спаривательное взаимодействие V_{eff} , которое подчиняется

уравнению типа уравнения Бете–Голдстоуна в дополнительном подпространстве:

$$V_{\text{eff}} = \mathcal{U} + \mathcal{U} G G V_{\text{eff}}|_{S'}. \quad (5)$$

Если модельное пространство достаточно широкое, эффектами спаривания в уравнении для V_{eff} можно пренебречь. Поэтому мы заменили в (5) функцию Грина G^s в системе со спариванием на ее аналог G в нормальной системе. В приближении БКШ блок \mathcal{U} в (5) должен быть заменен на \mathcal{V} . Для решения уравнения для эффективного взаимодействия в задаче о спаривании в плоском слое ядерного вещества был найден новый вариант локального приближения – локально-потенциальное приближение (LPA) [11, 12]. Оно состоит в том, что в пространстве S' для каждой точки \mathbf{R} можно пользоваться формулами бесконечной системы, помещенной в потенциальное поле $U(\mathbf{R})$. Это делает уравнение для V_{eff} гораздо более простым, чем исходное уравнение для Δ , в результате чего пространство S' может быть выбрано очень большим. Непосредственным сравнением с прямым решением уравнения для V_{eff} было показано, что при достаточно большой величине E_0 ($\simeq 20 \div 30$ МэВ) LPA имеет высокую точность повсюду, включая поверхностную область. Применимость приближения LPA была подтверждена для конечных ядер (на примере ядра ^{120}Sn) [7, 8], однако при этом пришлось увеличить граничную энергию до $E_0 = 40$ МэВ. В этой работе мы будем использовать приближение LPA с этим значением E_0 для систематических расчетов спаривательной щели в сферических ядрах. В качестве \mathcal{V} , как и в [8], будем использовать аргонский потенциал v_{18} .

Отметим, что применение мягких сил $V_{\text{low-}k}$ также можно формально свести к такой же двухступенчатой схеме решения уравнения для щели (1) с $E_0 \simeq 300$ МэВ, причем функции Грина G в (5) заменяются на свободные. Тогда (при $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$) получаем $V_{\text{eff}} \rightarrow V_{\text{low-}k}$ (см. [13], где для нахождения $V_{\text{low-}k}$ вместо уравнения ренорм-группы используется обычная схема перенормировок, как в нашем двухступенчатом методе). Таким образом, сравнение прямого решения [3] уравнения для щели (1) (или (2)) с аргонским NN -потенциалом \mathcal{V} и “перенормированного” уравнения (4) с $V_{\text{eff}} = V_{\text{low-}k}$ показывает, что различия возникают благодаря тому, что в дополнительном подпространстве S' использовалось $m^* \neq m$ в первом случае и $m^* = m$ во втором. Тем самым, результат зависит не только от значения эффективной массы на поверхности Ферми, но и от всей функции $m^*(k)$ в широкой области k . Эта зависимость была явно продемонстрирована в [7, 8]. Ис-

пользование эффективной массы, соответствующей СХФ схеме с силами $SLy4$ или какому-либо другому варианту сил Скирма, вряд ли можно считать оправданным. Действительно, эти силы были введены таким образом, чтобы правильно описывать систематику энергий связи и радиусов ядер. Как правило, силы Скирма довольно плохо описывают одночастичные спектры даже вблизи поверхности Ферми, тем более трудно ожидать, что они воспроизведут его правильно при больших импульсах, которые входят в уравнение для щели (1). Это обстоятельство делает проблематичным нахождение спаривательной щели полностью из первых принципов. Ситуация усугубляется тем, что в многотельное уравнение (1) наряду с “ k -массой”, рассматриваемой в СХФ-методе, входит и “ E -масса” (обратный Z -фактор) [15–16], которая также не известна с достаточной точностью даже в ядерной материи [8]. Список поправок к БКШ варианту уравнения (1) завершает отличие блока \mathcal{U} от потенциала \mathcal{V} , главным образом, благодаря так называемому индуцированному взаимодействию. Попытка рассчитать его в [3] через те же силы $SLy4$, что и среднее поле ядра, представляется сомнительной хотя бы потому, что эти силы были фитированы по ядерным характеристикам, зависящим в основном от тех комбинаций параметров сил Скирма, которые определяют скалярные амплитуды Ландау–Мигдала (ЛМ) f, f' . Спиновые амплитуды g, g' при этом остаются практически не известными. В то же время вклад спинового канала в индуцированное взаимодействие не меньше, чем вклад скалярного канала [3]. Константы g, g' хорошо известны из расчетов магнитных моментов ядер в рамках теории конечных ферми-систем (ТКФС) [17], но, как и параметры сил Скирма, только вблизи поверхности Ферми. При расчете же индуцированного взаимодействия представлены с большим весом состояния вдали от поверхности Ферми. Но если даже представить себе, что мы знаем с какой-то точностью из феноменологии $m^*(k), Z(k)$ и все амплитуды ЛМ вдали от поверхности Ферми, использование в таком расчете исходного первопринципного объекта – свободного NN -потенциала \mathcal{V} значительно обесценилось бы введением большого числа феноменологических параметров.

Вместо этого, мы предлагаем полумикроскопическую модель эффективного спаривательного взаимодействия, в которой к главному члену, рассчитанному из первых принципов, добавляется сравнительно небольшое слагаемое, содержащее один феноменологический параметр, которое приближенно учтет все упомянутые поправки к уравнению БКШ для щели.

Самый простой анзац для такого эффективного спаривательного взаимодействия таков:

$$V_{\text{эфф}} = V_{\text{эфф}}^0 + \gamma C_0 \frac{\rho(r)}{\bar{\rho}(0)} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4). \quad (6)$$

Здесь $C_0 = (dn/d\varepsilon_F)^{-1} = 300 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^3$ – стандартный размерный множитель ТКФС [9] для эффективного взаимодействия, $\rho(r)$ – плотность частиц данного сорта, а γ – безразмерный феноменологический параметр. Чтобы избежать влияния оболочечных флуктуаций в значении $\bar{\rho}(0)$, эта величина усреднялась по области $r < 2 \text{ фм}$. Первый, “первопринципный”, член в правой части (6) отвечает решению уравнения (5) с $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ в рамках описанного выше метода LPA, причем в дополнительном пространстве S' полагается $m^* = m$. Далее, уравнение для щели (4) в модельном пространстве решается в самосогласованном базисе, найденном в рамках Обобщенного метода функционала плотности (ОМФП) [18], в котором справедливо $m^* = m$, с функционалом DF3. Использование такого базиса принципиально по двум причинам. Во-первых, решение уравнения для щели чувствительно к положению одночастичных уровней у поверхности Ферми, а для их успешного воспроизведения требуется $m^* \simeq m$. Это условие осуществляется, например, в феноменологической самосогласованной ТКФС [19] благодаря почти точной компенсации k -массы и E -массы на поверхности Ферми. Значительная, хотя и не полная, компенсация имеет место и в теории Бракнера ядерной материи [20]. В ОМФП равенство $m^* = m$ постулируется. Главное же, мы устраняем значительную неопределенность, связанную с плохим знанием функции $m^*(k)$ вдали от поверхности Ферми, как в уравнении для щели (4), так и в уравнении (5) для эффективного взаимодействия. Мы надеемся учесть интегральный эффект от $m^* \neq m$ вдали от границы Ферми вторым членом (6). Фактор $\rho(r)/\bar{\rho}(0)$ обеспечивает обращение поправочного члена в нуль за краем ядра, где разность $m^*(r) - m = 0$ (как и разность $Z(r) - 1$ и индуцированный член $V_{\text{эфф}}$). Разумеется, на этом месте могла бы стоять любая функция, обращающаяся в нуль за краем ядра, мы выбрали простейшую.

Выражение (6) обладает одним очевидным недостатком. Феноменологическое спаривательное взаимодействие ОМФП [18] содержит поверхностный член ($\propto (dp/dr)^2$), который играет важную роль для правильного описания нечетно-четного эффекта (staggering) в радиусах ядер. Он происходит в основном от обмена поверхностными фононами, который в [2, 3] учитывался явно. Добавление такого

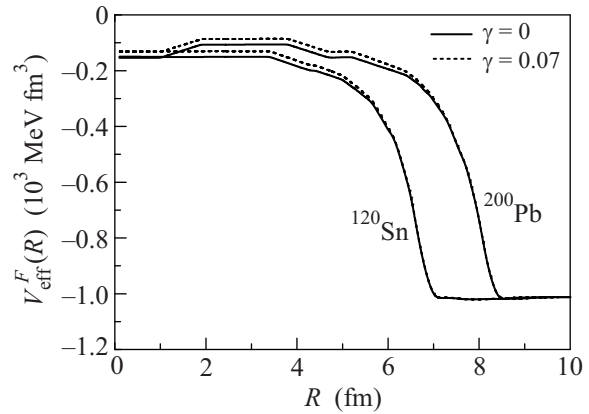
Таблица 1

Нейтронная щель Δ_F^n (МэВ) в полумагических ядрах

Ядро	Δ_F^n			Δ_{exp}
	$\gamma = 0$	0.06	0.08	
^{182}Pb	1.79	1.33	1.20	1.30
^{184}Pb	1.79	1.33	1.20	1.34
^{186}Pb	1.78	1.32	1.19	1.30
^{188}Pb	1.76	1.31	1.17	1.25
^{190}Pb	1.73	1.29	1.16	1.24
^{192}Pb	1.68	1.22	1.09	1.21
^{194}Pb	1.62	1.16	1.03	1.13
^{196}Pb	1.53	1.09	0.96	1.01
^{198}Pb	1.43	1.00	0.87	0.94
^{200}Pb	1.31	0.90	0.80	0.87
^{202}Pb	1.16	0.79	0.69	0.78
^{204}Pb	0.95	0.64	0.56	0.71
^{106}Sn	1.35	0.95	0.83	1.20
^{108}Sn	1.52	1.13	1.01	1.23
^{110}Sn	1.65	1.26	1.14	1.30
^{112}Sn	1.74	1.34	1.23	1.29
^{114}Sn	1.80	1.40	1.28	1.14
^{116}Sn	1.82	1.43	1.31	1.10
^{118}Sn	1.83	1.44	1.32	1.25
^{120}Sn	1.80	1.42	1.31	1.32
^{122}Sn	1.74	1.38	1.28	1.30
^{124}Sn	1.65	1.30	1.21	1.25
^{126}Sn	1.51	1.19	1.10	1.20
^{128}Sn	1.31	1.02	0.94	1.16
^{44}Ca	1.83	1.50	1.41	1.54

члена к (6) сопряжено с введением еще одного дополнительного параметра, чего мы хотим избежать на первом этапе. Более последовательная схема состоит, по-видимому, в явном учете только низколежащих фононов, как, например, в [2], но с учетом охватывающих (tadpole) диаграмм [21]. Пока же мы посмотрим, с какой точностью можно воспроизвести с помощью простого полумикроскопического анзаца (6) экспериментальные значения щели Δ для атомных ядер в достаточно широком диапазоне массовых чисел. Мы ограничимся полумагическими ядрами, которые являются сферическими. Рассмотрим сначала нейтронное спаривание на примере изотопических цепочек свинца, олова и кальция. Мы пользуемся схемой “развитого спаривания” [9], для справедливости которой нужно отступить от магического остова по крайней мере на четыре нейтрона. Поэтому в случае цепочки изотопов кальция мы ограничились одним изотопом ^{44}Ca . Экспериментальные значения Δ_{exp} можно вычислять через массы M соседних ядер по 3-членным

формулам: $2\Delta_{\text{exp}}^+(A) = 2M(A+1) - M(A+2) - M(A)$ или $2\Delta_{\text{exp}}^-(A) = 2M(A-1) - M(A-2) - M(A)$, но более точным принято считать 5-членное выражение $\Delta_{\text{exp}}(A) = (\Delta_{\text{exp}}^+(A) + \Delta_{\text{exp}}^-(A))/2$, которое мы и используем, за исключением тех случаев, когда отсутствуют какие-либо экспериментальные данные. В качестве теоретического мы приводим ферми-среднее значение щели: $\Delta_F = \sum_{\lambda} (2j+1)\Delta_{\lambda\lambda} / \sum_{\lambda} (2j+1)$, где сумма ведется по одночастичным состояниям λ , попадающим в интервал $|\varepsilon_{\lambda} - \mu| < 3$ МэВ. Результаты представлены в табл.1. Как видно, значения щели с “первопринципным” взаимодействием ($\gamma=0$) на 30–40% больше экспериментальных. Оптимальным значением можно принять $\gamma=0.07$ (полусумма значений в третьем и четвертом столбцах). Для большинства ядер в этом случае отличие теории от эксперимента порядка 0.1 МэВ. Вообще мы оцениваем точность такой простой модели как $\simeq 0.2$ МэВ. Ошибка превосходит эту величину лишь для ^{106}Sn и ^{116}Sn . По-видимому, это вызвано неточным воспроизведением функционалом DF3 энергии “intruder”-уровня $1h_{11/2}$, который играет большую роль в уравнении (4) для Δ . Увидеть, что феноменологическая добавка к V_{eff} в (6) действительно очень мала, можно на рисунке, где

Эффективное взаимодействие V_{eff}

построено локализованное “ферми-среднее” эффективное взаимодействие [11, 8] при $\gamma=0$ и $\gamma=0.07$ для двух ядер ^{120}Sn и ^{200}Pb . Причина столь большого эффекта в величине Δ – хорошо известная экспоненциальная зависимость спаривательной щели от взаимодействия.

Перейдем теперь к протонам. В этом случае к взаимодействию (6) необходимо добавить кулоновское взаимодействие \mathcal{V}_C . Оценки показывают, что его можно брать в неперенормированном виде. Результаты расчетов для цепочки изотопов $N = 82$

представлены в табл.2. Для демонстрации величины эффекта кулоновского взаимодействия мы пред-

Таблица 2

Протонная щель Δ_F^p (МэВ) для цепочки изотонов $N = 82$

Ядро	Δ_F^p				Δ_{exp}
	$\mathcal{V}_{\text{eff}}^p = \mathcal{V}_{\text{eff}}^0$	$\mathcal{V}_{\text{eff}}^p = \mathcal{V}_{\text{eff}} + \mathcal{V}_C$			
		$\gamma=0$	0.06	0.08	
^{136}Xe	1.65	1.19	0.87	0.78	0.75
^{138}Ba	1.80	1.33	0.98	0.88	0.87
^{140}Ce	1.90	1.42	1.03	0.92	0.97
^{142}Nd	1.99	1.48	1.06	0.94	1.00
^{144}Sm	2.01	1.49	1.05	0.91	1.02
^{146}Gd	2.02	1.50	1.05	0.91	1.13
^{148}Dy	2.01	1.50	1.06	0.93	1.19
^{150}Er	1.98	1.48	1.07	0.94	1.22
^{152}Yb	1.92	1.44	1.05	0.93	1.29

ставили во втором столбце результат расчета с взаимодействием (6) ($\gamma = 0$), разница между которым и соответствующим значением в третьем столбце дает величину кулоновского эффекта в щели Δ_F^p . Он оказывается большим (около 0.5 МэВ), что качественно согласуется с [4]. Опять при $\gamma = 0.07$ для большинства ядер согласие с экспериментом достаточно хорошее, и лишь для двух наиболее тяжелых изотопов расхождение превышает 0.2 МэВ. Здесь возможная причина расхождения – близость фазового перехода в деформированное состояние, которая может менять структуру основного состояния.

Таким образом, простая полумикроскопическая модель эффективного спаривательного взаимодействия (6), содержащая один феноменологический параметр, который эффективно учитывает различные поправки к схеме БКШ, довольно хорошо воспроизводит экспериментальные значения спаривательной щели нейтронов и протонов в полумагических ядрах. В целом, достигнутое согласие ($\sqrt{(\delta\Delta)^2} \simeq 0.13$ МэВ) лучше, чем в расчетах [4], где явно новые параметры не вводились, но скрытыми параметрами являлось использование определенной зависимости $m^*(k)$.

Работа выполнена при поддержке грантов Министерства науки и образования # НШ-7235.2010.2 и # 2.1.1/4540, грантов Российского фонда фун-

даментальных исследований # 09-02-01284-а и # 09-02-12168-офи_м, а также совместного гранта Российского фонда фундаментальных исследований и DFG, Германия, # 09-02-91352-ННИО_а, # 436 RUS 113/994/0-1(R).

1. F. Barranco, R. A. Broglia, H. Esbensen, and E. Vigezzi, Phys. Lett. B **390**, 13 (1997).
2. F. Barranco, R. A. Broglia, G. Colo et al., Eur. Phys. J. A **21**, 57 (2004).
3. A. Pastore, F. Barranco, R. A. Broglia, and E. Vigezzi, Phys. Rev. C **78**, 024315 (2008).
4. T. Duguet and T. Lesinski, Eur. Phys. J. Special Topics **156**, 207 (2008).
5. K. Hebel, T. Duguet, T. Lesinski, and A. Schwenk, Phys. Rev. C **80**, 044321 (2009).
6. А. В. Авдеенков, С. П. Камерджи́ев, Письма в ЖЭТФ **69**, 669 (1999).
7. С. С. Панкратов, М. Балдо, М. В. Зверев и др., Письма в ЖЭТФ **90**, 612 (2009).
8. M. Baldo, U. Lombardo, S. S. Pankratov, and E. E. Saperstein, J. Phys. G: Nucl. Phys. **37**, 064016 (2010).
9. А. Б. Мигдал, Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер, М.: Наука, 1965.
10. S. K. Bogner, T. T. S. Kuo, and A. Schwenk, Phys. Rep. **386**, 1 (2003).
11. M. Baldo, U. Lombardo, E. E. Saperstein, and M. V. Zverev, Phys. Rep. **391**, 261 (2004).
12. Э. Е. Саперштейн, С. С. Панкратов, М. В. Зверев и др., ЯФ **72**, 1059 (2009).
13. L.-W. Siu, J. W. Holt, T. T. S. Kuo, and G. E. Brown, Phys. Rev. C **79**, 054004 (2009).
14. M. Baldo and A. Grasso, Phys. Lett. B **485**, 115 (2000).
15. M. Baldo and A. Grasso, Phys. At. Nucl. **64**, 611 (2001).
16. U. Lombardo, P. Schuck, and W. Zuo, Phys. Rev. C **64**, 021301(R) (2001).
17. В. Н. Борзов, Э. Е. Саперштейн, С. В. Толоконников, ЯФ **71**, 493 (2008).
18. S. A. Fayans, S. V. Tolokonnikov, E. L. Trykov, and D. Zawischa, Nucl. Phys. A **676**, 49 (2000).
19. V. A. Khodel and E. E. Saperstein, Phys. Rep. **92**, 183 (1982).
20. P. Ring and P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, Springer, Berlin, 1980.
21. S. Kamerdzhiev and E. E. Saperstein, Eur. Phys. J. A **37**, 333 (2008).