Письма в ЖЭТФ, том 92, вып. 2, с. 124 – 129

Неадиабатические поправки к скорости броуновского мотора со сложным потенциальным рельефом

В. М. Розенбаум[1)], *И. В. Шапочкина*[2)*]

Институт химии поверхности им. А.А. Чуйко НАН Украины, 03164 Киев, Украина

[*] Белорусский государственный университет, 220050 Минск, Беларусь

Поступила в редакцию 18 мая 2010 г.

Установлен ряд закономерностей, регулирующих перемещение броуновской частицы вдоль периодического потенциального рельефа при адиабатически быстром (за время τ_0) и адиабатически медленном изменении его формы. Рассчитана средняя скорость частицы, содержащая неадиабатический вклад, который зависит от τ_0 и характерных времен системы, определяющихся особенностями формы потенциального рельефа. Показано, что для плавного потенциального рельефа неадиабатическая поправка к скорости пропорциональна τ_0^2, а в случае прыжкового движения в потенциале, содержащем барьеры и ямы, пропорциональна τ_0, и именно она ограничивает большие значения коэффициента выпрямления движения в высокоэффективном режиме работы мотора.

Броуновский мотор с флуктуирующей потенциальной энергией является наиболее плодотворной и достаточно простой моделью, описывающей возникновение направленного движения в неравновесных асимметричных системах [1, 2]. Среди моделей такого типа особую роль играет адиабатический мотор, работающий в квазиравновесном обратимом режиме. Удивительное свойство этого мотора состоит в том, что в каждый момент времени система находится в термодинамическом равновесии с нулевым мгновенным потоком частиц, тогда как поток, усредненный по периоду τ адиабатически медленного изменения потенциальной энергии, не равен нулю [3]. Более того, такой средний поток не требует энергетических затрат подобно сверхпроводящему току [4]. В то же время, эти затраты необходимы для того, чтобы адиабатический мотор производил полезную работу. При этом эффективность преобразования энергии в определенных условиях может стремиться к единице [5].

Необходимое условие функционирования адиабатического мотора с медленным изменением потенциальной энергии состоит в том, чтобы такое изменение осуществлялось посредством более чем одной функции времени и замкнутая кривая, описывающая периодический процесс в фазовом пространстве этих функций, имела ненулевую площадь [3]. Адиабатичность процесса, то есть отсутствие теплообмена между рассматриваемой системой и средой, может быть реализована также и при мгновенном изменении потенциального рельефа (адиабатически быстрый процесс). В этом случае для существования ненулевого потока достаточно, чтобы периодическая по координате потенциальная энергия $V(x,\sigma(t))$ определялась только одной функцией времени $\sigma(t)$, имеющей хотя бы один скачок на периоде τ ее изменения с $\tau \to \infty$. Существенным отличием данного мотора от адиабатического является наличие теплообмена, происходящего после скачка потенциальной энергии. Тем не менее, как будет показано в данной статье, оба класса моторов имеют много общего в особенностях их описания и функционирования.

Характерным примером броуновского мотора со скачкообразным изменением потенциальной энергии может служить дихотомный процесс, для которого в детерминистическом случае функция $\sigma(t)$ содержит на периоде τ два скачка и две области с постоянными значениями между ними [6 – 9]. Однако предположение о мгновенном изменении потенциального рельефа является идеализацией, которой в природе не существует. В реальности всегда имеется переходной процесс длительностью τ_0, характеризующей быстроту изменения потенциальной энергии. При этом малость параметра τ_0 определяется его сопоставлением с собственным временным параметром системы, которым для броуновского мотора с потенциальным рельефом, описываемым плавной функцией координаты, может служить характерное время диффузии частицы $\tau_D = L^2/D$ (D – коэффициент диффузии) на периоде L потенциальной энергии. Анализ зависящих от τ_0 неадиабатических поправок важен как с прикладной, так и с фундаментальной точек зрения. Например, в случае биологических моторов длитель-

[1)]e-mail: vrozen@isc.gov.ua, vik_roz@mail.ru
[2)]e-mail: shapoch@mail.ru

ности конформационных переходов в белковых молекулах лежат в широком интервале 10^{-4}–10^{-3} с [10], а $\tau_D \sim 10^{-3}$ с [11, 12], так что времена τ_0 и τ_D могут оказаться одного порядка. Фундаментальное значение учета неадиабатических поправок состоит в том, что последние (в отличие от величин, вычисленных в адиабатическом пределе) зависят от характерных времен системы, которые определяются особенностями потенциального рельефа и могут существенно различаться. За счет этого появляется возможность анализа иерархии таких времен и их влияния на характеристики броуновского мотора.

Статистическое описание движения броуновской частицы с потенциальной энергией $V(x, \sigma(t))$ проводится с помощью функции распределения $\rho(x,t)$, удовлетворяющей уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\hat{J}(x,t)\rho(x,t) \qquad (1)$$

или, с учетом явного вида оператора потока

$$\hat{J}(x,t) = -\beta D V'(x, \sigma(t)) - D\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (2)$$

– уравнению Смолуховского [13]. Здесь $\beta = (k_B T)^{-1}$ (k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура), $V'(x,\sigma(t)) = \partial V(x,\sigma(t))/\partial x$ и функция $\rho(x,t)$ предполагается нормированной на период L потенциальной энергии ($\int_0^L \rho(x,t)dx = 1$).

Определим долю частиц, пересекающих точку x за время τ:

$$\Phi(x) \equiv \int\limits_0^\tau dt\hat{J}(x,t)\rho(x,t) = \Phi(0) - \int\limits_0^x dy[\rho(y,\tau) - \rho(y,0)]. \qquad (3)$$

Последнее равенство в (3) записано с учетом уравнения (1). Величина $\Phi(0)$ задает долю частиц, пересекающих точку $x = 0$. Для установившихся периодических процессов (с $\rho(x,\tau) = \rho(x,0)$ и $\sigma(\tau) = \sigma(0)$) функция $\Phi(x)$ не зависит от x, и именно величина $\Phi(0)$ определяет средний поток $\langle J\rangle_\tau \equiv \tau^{-1}\Phi(0)$ и среднюю скорость $L\langle J\rangle_\tau$.

Будем считать, что в момент времени $t = 0$, когда $\sigma(0) = a$, система пребывает в равновесном состоянии, описываемом функцией распределения $\rho_-(x,a)$; на интервале $0 < t < \tau_0$ потенциальная энергия претерпевает резкое изменение от $V(x,a)$ до $V(x,b)$, описываемое функцией $\sigma(t)$, и на интервале $\tau_0 < t < \tau$ $V(x,\sigma(t))$ остается равной $V(x,b)$ (см. линию $M_1M_2M_4$ на рис.1). При $\tau \gg \tau_D$ система успевает отрелаксировать к новому потенциальному рельефу, соответствующему равновесной функции распределения $\rho_-(x,b)$. Используя явный вид оператора потока (2) и поведение $V(x,\sigma(t))$ и $\rho(x,t)$ на каждом

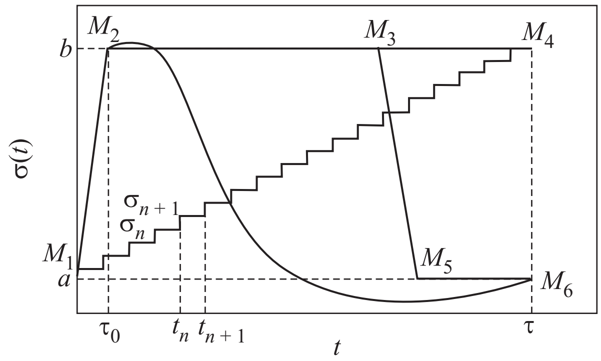

Рис.1. Различные виды функции $\sigma(t)$, управляющей временной зависимостью потенциальной энергии

временном интервале, можно получить, что $\Phi(0)$ окажется равной

$$\Delta\Phi^{ab} = \Delta\Phi^{ab}_{\text{ad}} + \Delta\Phi^{ab}_{\text{nonad}},$$

$$\Delta\Phi^{ab}_{\text{ad}} = \int\limits_0^L dx\rho_+(x,b)\int\limits_0^x dy[\rho_-(y,b) - \rho_-(y,a)],$$

$$\Delta\Phi^{ab}_{\text{nonad}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\beta^3 D^2 \int\limits_0^L dx\rho_+(x,b)\rho_-(x,a)[V'(x,a) + V'(x,b)]\times \qquad (4)$$

$$\times\int\limits_0^{\tau_0} dt[V'(x,b) - V'(x,\sigma(t))]\int\limits_0^t dt'[V'(x,\sigma(t')) - V'(x,a)],$$

$$\rho_\pm(x,\sigma) = \exp[\pm\beta V(x,\sigma)]\Big/\int\limits_0^L dx\exp[\pm\beta V(x,\sigma)].$$

Здесь адиабатический вклад $\Delta\Phi^{ab}_{\text{ad}}$ совпадает с полученным в [3], а неадиабатическая поправка $\Delta\Phi^{ab}_{\text{nonad}}$ будет предметом дальнейшего обсуждения.

Прежде всего отметим два важных следствия соотношений (4). Во-первых, они позволяют сразу записать средний поток (в низкочастотном пределе $\tau^{-1} \to 0$) для детерминистического дихотомного процесса с двумя переходными состояниями (ломаная линия $M_1M_2M_3M_5M_6$ на рис.1)

$$\langle J\rangle^{\text{dikh}}_\tau = \tau^{-1}(\Delta\Phi^{ab} + \Delta\Phi^{ba}). \qquad (5)$$

Второе следствие состоит в возможности определить $\Phi(0)$ при бесконечно медленном изменении потенциальной энергии от $V(x,a)$ до $V(x,b)$ как предельный переход Φ^{ab} интегральной суммы, описывающей N

малых скачков, разделенных временными интервалами, хотя и малыми, но достаточными для установления равновесия на каждом из них (ломаная линия M_1M_4 на рис.1):

$$\sum_{n=0}^{N-1}\int_0^L dx\rho_+(x,\sigma_{n+1})\times$$

$$\times\int_0^x dy[\rho_-(y,\sigma_{n+1})-\rho_-(y,\sigma_n)]\to\Phi^{ab}, \qquad (6)$$

$$\Phi^{ab}\equiv\int_a^b d\sigma\int_0^L dx\rho_+(x,\sigma)\int_0^x dy\frac{\partial}{\partial\sigma}\rho_-(y,\sigma).$$

Меняя порядок интегрирования по x и y в последнем выражении, применяя интегрирование по частям по переменной σ, а также используя условие нормировки $\rho_\pm(x,\sigma)$, получаем

$$\int_a^b d\sigma\int_0^L dx\int_0^x dy\times$$

$$\times\left[\rho_+(x,\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\rho_-(y,\sigma)-\rho_-(x,\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\rho_+(y,\sigma)\right]=$$

$$=\varphi_+(b,b)-\varphi_+(a,a), \qquad (7)$$

где введена вспомогательная величина

$$\varphi_\pm(a,b)\equiv\int_0^L dx\rho_\pm(x,a)\int_0^x dy\rho_\mp(y,b)=1-\varphi_\mp(b,a). \qquad (8)$$

Соотношение (7) позволяет вычислить интеграл по σ в (6) для антисимметричных потенциальных профилей $V(x,\sigma(t))$ (пространственная периодичность этих профилей и независимость решений уравнения Смолуховского от постоянного энергетического сдвига дают возможность определить антисимметрию условием существования таких произвольных постоянных x_0 и V_0, чтобы удовлетворялось равенство $V(-x,\sigma(t))=-V(x+x_0,\sigma(t))+V_0$):

$$\Phi^{ab}=\frac{1}{2}[\varphi_+(b,b)-\varphi_+(a,a)]. \qquad (9)$$

Рассмотрим теперь замкнутый процесс, состоящий из областей (a,b) и (b,a) с соответственно резким и плавным изменением потенциальной энергии (линия $M_1M_2M_6$ на рис.1). Для него средний поток запишется в виде

$$\langle J\rangle_\tau=\tau^{-1}(\Delta\Phi^{ab}+\Phi^{ba})=$$

$$=\frac{1}{2}\tau^{-1}[\varphi_+(a,a)+\varphi_+(b,b)-2\varphi_+(a,b)]+\tau^{-1}\Delta\Phi^{ab}_{\rm nonad}. \qquad (10)$$

Здесь учтено, что адиабатический вклад в (4) также выражается через функции (8), $\Delta\Phi^{ab}_{\rm ad}=\varphi_+(b,b)-\varphi_+(b,a)$, и использовано равенство $\varphi_+(a,b)=\varphi_+(b,a)$, справедливое для антисимметричных потенциальных профилей.

Обратим внимание, что полученное выражение равно половине вклада дихотомного процесса (5), в котором два переходных состояния считаются идентичными. Таким образом, средний поток не зависит от вида функции $\sigma(t)$ на плавном участке и потому определяется исключительно областью с резким изменением потенциальной энергии.

Явные выражения для адиабатического вклада и неадиабатической поправки приведем для пилообразного антисимметричного потенциального рельефа, изображенного на рис.2а. Если функцию $\sigma(t)$ определить как отношение амплитуды рельефа $V_{\rm amp}(t)$ к k_BT, то есть $\sigma(t)=\beta V_{\rm amp}(t)$, и считать, что на участке резкого изменения $\sigma(t)$ изменяется от a к b по линейному закону, то

$$\varphi_+(a,b)=\frac{1}{2}-\frac{L-2l}{2L}\frac{a\coth(a/2)-b\coth(b/2)}{a-b}\xrightarrow{b\to a}$$

$$\xrightarrow{b\to a}\frac{1}{2}-\frac{L-2l}{2L}\left(\coth(a/2)-\frac{a}{2\sinh^2(a/2)}\right),$$

$$\langle J\rangle_\tau=\frac{L-2l}{4L\tau}\left[\frac{a}{2\sinh^2(a/2)}+\frac{b}{2\sinh^2(b/2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{a+b}{a-b}\frac{\sinh[(a-b)/2]}{\sinh(a/2)\sinh(b/2)}\right]+\tau^{-1}\Delta\Phi^{ab}_{\rm nonad}, \qquad (11)$$

$$\Delta\Phi^{ab}_{\rm nonad}=-\frac{L-2l}{L}\frac{ab(a^2-b^2)\sinh(a-b)/2}{96\sinh(a/2)\sinh(b/2)}\frac{D^2\tau_0^2}{l^2(L-l)^2}.$$

Из (11) следует, что направление движения определяется знаками потенциальной энергии и коэффициента асимметрии $1-2l/L$, причем неадиабатическая поправка всегда уменьшает абсолютное значение потока. Отметим, что для предельно асимметричного потенциального рельефа с $l\to 0$ или $l\to L$ адиабатический вклад максимален и принимает ограниченное значение, тогда как неадиабатическая поправка расходится. Последнее означает, что полученное выражение для $\Delta\Phi^{ab}_{\rm nonad}$ справедливо при выполнении условия $\tau_0\ll\tilde\tau_D$, где $\tilde\tau_D\equiv l(L-l)/D$ – новое характерное время рассматриваемой системы, меньшее τ_D и стремящееся к нулю при $l\to 0$ или $l\to L$ (рис.2а). При $\tilde\tau_D<\tau_0\ll\tau$ мы выходим за рамки адиабатического приближения. В этом случае средний поток пропорционален τ^{-2} [14, 15].

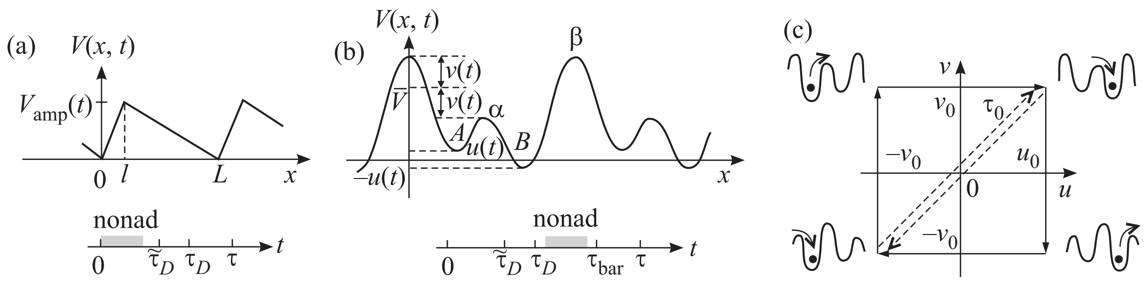

Рис.2. Примеры пространственно-временной зависимости потенциальной энергии: однопараметрический пилообразный потенциальный рельеф с изменяющейся со временем амплитудой $V_{\mathrm{amp}}(t)$ (a), двухпараметрический потенциальный рельеф с изменяющимися со временем минимумами потенциальных ям $u(t)$ и максимумами барьеров $v(t)$ (b), фазовая диаграмма изменения функций $u(t)$ и $v(t)$ (c). На временных шкалах отражены иерархии характерных времен системы и области, в которых справедливы рассчитанные неадиабатические поправки. Сплошные и штриховые линии фазовой диаграммы относятся к адиабатически медленному и быстрому процессам, соответственно. Фрагменты потенциального рельефа в вершинах прямоугольника указывают положение частицы и направление ее прихода или ухода на каждой стадии процесса

Возникновение перенормированного параметра $\tilde{\tau}_D$ является отражением особенности потенциального рельефа. В тех случаях, когда имеется несколько узких и высоких барьеров на пространственном периоде потенциального профиля, появляются не только малые (как $\tilde{\tau}_D$), но и большие характерные времена системы $\tau_{\mathrm{bar}} \sim \tau_D \exp \beta V_{\mathrm{bar}}$, где V_{bar} – высота барьера, а $\beta V_{\mathrm{bar}} \gg 1$. Новый временной параметр τ_{bar} задает время, необходимое броуновской частице для преодоления барьера. Если при этом период τ флуктуаций потенциального профиля заметно превышает τ_D, то в каждой из ям, разделенных этими барьерами, успевает установиться локальное термодинамическое равновесие, а направленное движение приобретает прыжковый характер. При выполнении перечисленных условий становится возможным кинетическое описание, оперирующее временными зависимостями вероятностей заполнения потенциальных ям и констант скоростей переходов из ямы в яму [16].

В качестве примера рассмотрим потенциальный рельеф с двумя ямами и барьерами, изображенный на рис.2b. Минимумы потенциальных ям и максимумы барьеров характеризуются функциями времени $u(t)$ и $v(t)$, измеряемыми в единицах $k_B T$. Уравнение для вероятности $\rho_A(t)$ заполнения потенциальной ямы A и выражение для потока $J_\alpha(t)$ через барьер α можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\rho_A(t) = -2w \cosh v(t) [2\rho_A(t) \cosh u(t) - e^{-u(t)}], \tag{12}$$

$$J_\alpha(t) = -\frac{e^{v(t)}}{2\cosh v(t)} \frac{d}{dt}\rho_A(t),$$

где $w = w_0 \exp(-\bar{V}) \sim \tau_{\mathrm{bar}}^{-1}$ (w_0 – предэкспоненциальный фактор, зависящий от коэффициента диффузии и кривизны потенциального профиля в точках максимума и минимума, $\bar{V}$ – среднее положение максимумов барьеров относительно среднего положения минимумов потенциальных ям). Вероятность заполнения потенциальной ямы B выражается через $\rho_A(t)$ из условия нормировки $\rho_B(t) = 1 - \rho_A(t)$, а поток через барьер β равен взятому со знаком минус потоку $J_\alpha(t)$, в котором выполнена замена $v(t)$ на $-v(t)$. В адиабатическом пределе ($\tau \gg \tau_{\mathrm{bar}}$) перемещение броуновской частицы определяется равновесной функцией распределения $\rho_A(t) = \rho_-[u(t)] = e^{-u(t)}/[2\cosh u(t)]$, зависящей только от $u(t)$, и функцией $\rho_+[v(t)] = e^{v(t)}/[2\cosh v(t)]$, зависящей только от $v(t)$. При этом средний поток за период τ плавно изменяющихся функций $u(t)$ и $v(t)$ отличен от нуля, только если замкнутый контур, описывающий их изменение в фазовом пространстве $u - v$, имеет ненулевую площадь. Механизм возникновения адиабатического потока в этом случае наглядно проиллюстрирован на рис.2c. Для прямоугольного контура с вершинами $\pm u_0$, $\pm v_0$ поток оказывается равным $\langle J \rangle_\tau^{\mathrm{ad}} = \tau^{-1} \tanh v_0 \tanh u_0$, и для его поддержания не требуется энергетических затрат. Интересно, что точно такой же поток может быть реализован и дихотомным процессом, при котором функции $u(t)$ и $v(t)$ синхронно и скачкообразно изменяются от некоторых $-u_0$, $-v_0$ к u_0, v_0 и от u_0, v_0 – снова к $-u_0$, $-v_0$. Для поддержания этого потока требуется поступление энергии $4k_B T\tau^{-1} u_0 \tanh u_0$ в единицу времени [16]. Отметим, что в рамках используемой кинетической модели антисимметричный потенциальный профиль реализуется при $u(t) = v(t) = \sigma(t)$, и тогда справедливы формулы (9), (10) с $\varphi_+(a,b) = \rho_+(a)\rho_+(b)$.

Неадиабатическая поправка к среднему потоку, соответствующему линейному изменению функций $u(t)$ и $v(t)$ от $-u_0$, $-v_0$ к u_0, v_0 в течение малого времени τ_0 и обратно – от u_0, v_0 к $-u_0$, $-v_0$, оказывается равной

$$\langle J\rangle_\tau^{\rm nonad} = -\frac{u_0\sinh 2v_0 - v_0\sinh 2u_0}{(v_0^2-u_0^2)\cosh v_0\cosh u_0}\frac{w\tau_0}{\tau}. \qquad (13)$$

Существенное отличие неадиабатической поправки кинетического подхода (13), справедливой при $\tau_D \ll \tau_0 \ll \tau_{\rm bar}$, от поправок (4), (11), справедливых при $\tau_0 \ll \tilde\tau_D < \tau_D$, состоит в том, что первая линейна по τ_0, тогда как поправки (4), (11) квадратичны. Это отличие обусловлено тем, что на временной шкале кинетического описания за время τ_0 успевает установиться равновесное распределение на плавных (внебарьерных) участках потенциала.

Используемая кинетическая модель с двумя ямами и барьерами характеризуется высокой эффективностью преобразования энергии, когда один из барьеров в каждом дихотомном состоянии достаточно велик, чтобы запирать обратный поток [16, 17]. В наших обозначениях этот высокоэффективный режим соответствует $v_0 \gg 1$ при фиксированном малом барьере $v_{\min} = \bar V - v_0$ и $u_0 \ll 1$. Неадиабатическая поправка (13) в этом режиме убывает с ростом v_0 степенным образом, $\langle J\rangle_\tau^{\rm nonad} \approx \approx -u_0 v_0^{-2}(\tau_0/\tau)w_0\exp(-v_{\min})$, в отличие от адиабатического вклада, который экспоненциально быстро стремится к значению $u_0\tau^{-1}$. В рассматриваемой модели эффективность работы мотора можно характеризовать коэффициентом выпрямления движения κ, который определяется отношением потока $\langle J\rangle_\tau$ к среднему возвратно-поступательному потоку $\tau^{-1}\tanh u_0$ между потенциальными ямами A и B [16]. При учете неадиабатического вклада этот коэффициент стремится к единице по закону

$$\kappa \approx 1 - 2\exp(-2v_0) - v_0^{-2}\tau_0 w_0\exp(-v_{\min}). \qquad (14)$$

Из этого соотношения следует важный вывод, что именно неадиабатическая поправка ограничивает большие значения коэффициента выпрямления движения в высокоэффективном режиме работы мотора за счет ее степенного убывания с ростом v_0.

В заключение отметим, что адиабатически медленные и адиабатически быстрые изменения потенциального профиля инициируют направленное движение во многом родственным образом, хотя имеются и отдельные существенные отличия. Одинаковые потоки могут быть реализованы в обоих процессах. Более того, хотя в работах [3, 5] утверждалось, что только адиабатически медленный процесс характеризуется большой эффективностью преобразования энергии флуктуаций в направленное движение, в работе [17] было показано, что и адиабатически быстрый процесс также эффективен, когда потенциальный рельеф имеет флуктуирующие высокие барьеры, запирающие обратное движение. Основное отличие адиабатически медленных и адиабатически быстрых процессов состоит в том, что для инициирования направленного движения в первых требуется как минимум двухпараметрическая зависимость потенциальной энергии от времени, тогда как для вторых достаточно одной. Немаловажным является и то обстоятельство, что практическая реализация адиабатически быстрого процесса достаточно проста. Дихотомный процесс является ярким тому примером. В то же время, этот процесс всегда идеализирует реальные ситуации, в которых смена двух состояний происходит за ненулевое время τ_0. В этом плане важны рассчитанные в данной статье неадиабатические поправки, которые не только уменьшают среднюю скорость броуновской частицы, но и играют доминирующую роль в ограничении больших значений коэффициента выпрямления движения при высокоэффективном режиме работы мотора. Эти поправки дают ключ к пониманию того, как пространственно-временные изменения потенциальной энергии сказываются на характеристиках возникающего направленного движения.

1. P. Reimann, Phys. Rep. **361**, 57 (2002).
2. P. Hänggi and F. Marchesoni, Rev. Mod. Phys. **81**, 387 (2009).
3. J. M. R. Parrondo, Phys. Rev. E **57**, 7297 (1998).
4. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, Часть 2, М.: Наука, 1978.
5. J. M. R. Parrondo, J. M. Blanko, F. J. Chao, and R. Brito, Europhys. Lett. **43**, 248 (1998).
6. R. D. Astumian and M. Bier, Phys. Rev. Lett. **72**, 1766 (1994).
7. J. Prost, J.-F. Chauwin, L. Peliti, and A. Adjari, Phys. Rev. Lett. **72**, 2652 (1994).
8. J.-F. Chauwin, A. Ajdari, and J. Prost, Europhys. Lett. **27**, 421 (1994).
9. В. М. Розенбаум, Письма в ЖЭТФ **88**, 391 (2008) [JETP Lett. **88**, 342 (2008)].
10. H. Y. Park, S. A. Kim, J. Korlach et al., Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **105**, 542 (2008).
11. R. D. Astumian, Science **276**, 917 (1997).

12. A. Mogilner, M. Mangel, and R. J. Baskin, Phys. Lett. A **237**, 297 (1998).
13. H. Riskin, *The Fokker-Plank Equation. Methods of Solution and Applications*, Berlin: Springer-Verlag, 1989.
14. V. M. Rozenbaum, O. Ye. Vovchenko, and T. Ye. Korochkova, Phys. Rev. E **77**, 061111 (2008).
15. И. В. Шапочкина, В. М. Розенбаум, Вестник БГУ, Серия 1 № *2*, 43 (2009).
16. V. M. Rozenbaum, Yu. A. Makhnovskii, D.-Y. Yang et al., J. Phys. Chem. B **114**, 1959 (2010).
17. В. М. Розенбаум, Письма в ЖЭТФ **79**, 475 (2004) [JETP Lett. **79**, 388 (2004)].