Письма в ЖЭТФ, том 92, вып. 3, с. 212 – 215

О телепортации в системе тождественных частиц

С. П. Кулик, С. Н. Молотков[+*∇], *С. С. Страупе*

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 199992 Москва, Россия

[+]*Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия*

[*]*Академия Криптографии Российской Федерации, 121552 Москва, Россия*

[∇]*Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 199992 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 июня 2010 г.

Рассмотрена телепортация неизвестного состояния поляризации одного из фотонов в системе тождественных частиц. Показано, что для телепортации в системе тождественных частиц принципиальную роль играют пространственные степени свободы – различные направления импульса трех фотонов. Учет пространственных степеней свободы увеличивает размерность одночастичного пространства состояний, что позволяет в экспериментальной конфигурации выделить двухчастичное четырехмерное подпространство состояний, аналогичное пространству состояний, натянутому на белловские состояния в системе двух различимых кубитов.

Существует фундаментальный запрет на копирование (клонирование) неизвестного квантового состояния [1]. Однако неизвестное квантовое состояние может быть телепортировано [2]. Процесс телепортации был предложен в работе [2] и сводится к переносу неизвестного *квантового состояния* с одной частицы на другую частицу из пары частиц, находящихся в совместном запутанном состоянии. Телепортация осуществляется посредством измерения над частицей в неизвестном состоянии и одной частицей из ЭПР-пары (состояние Эйнштейна–Подольского–Розена [3]). Затем результат измерения сообщается по классическому каналу для совершения унитарного преобразования над второй частицей из ЭПР-пары, которая не измеряется. ЭПР-пара играет роль распределенного квантового канала связи. В результате вторая частица из ЭПР-пары оказывается точно в квантовом состоянии исходной частицы.

Телепортация в системе различимых частиц. Исходно процесс телепортации кубитов (двухуровневых квантовых систем) в работе [2] был сформулирован для *различимых частиц*. Последующие эксперименты по телепортации состояния с неизвестной поляризацией были проведены на фотонах, которые являются *тождественными частицами* [4, 5].

Нетрудно убедиться, что телепортация в системе трех тождественных *кубитов* оказывается невозможной. Это является следствием того, что размерность пространства состояний двух различимых кубитов равна четырем, а двух тождественных кубитов, из-за симметризации оказывается равной трем. До сих пор возникают утверждения, что телепортация невозможна, и что схема телепортации для *различимых частиц* [2] напрямую неприменима к реальной ситуации с тождественными частицами [4, 5], и поэтому интерпретация того, что наблюдается в экспериментах [4, 5], некорректна, поскольку используются результаты [2] для различимых частиц.

Слова о том, что тождественность частиц не важна в процессе телепортации, произносились и ранее [6], однако, насколько нам известно, четких разъяснений этого обстоятельства никто не сделал. Ниже будет рассмотрена телепортация неизвестного состояния поляризации для тождественных частиц – фотонов, которая отвечает экспериментальной ситуации в работах [4, 5]. Будет показано, что тождественность частиц не мешает телепортации. Однако в экспериментальной ситуации, кроме поляризационных степеней свободы, существенную роль играют пространственные степени свободы – три различных направления импульса фотонов. В результате размерность двухчастичного пространства состояний, симметризованного по перестановкам частиц, оказывается равной 10. В эксперименте процедура приготовления ЭПР-пары такова, что частицы в ЭПР-паре имеют разные импульсы по величине или направлению. Оказывается, что можно выделить 4-мерное подпространство состояний из 10- мерного, в котором симметричные двухчастичные состояния являются аналогичными базисным белловским состояниям в двухчастичном пространстве двух различимых частиц. В результате процесс телепортации становится полностью эквивалентным процессу телепортации в системе трех различимых частиц [2]. Единственная формальная разница состоит только в том, что для различимых частиц неизвестное состояние переносится (см. ниже) с третьей частицы на вторую, а о тождественных частицах нельзя сказать на какую частицу перенесено неизвестное квантовое состояние. Поскольку частицы неразличимы, то физически данное обстоятельство не играет никакой роли.

Для сравнения и самодостаточности изложения приведем сначала схему телепортации неизвестного состояния кубита для различимых частиц [2].

Запутанное состояние двух различимых кубитов есть

$$|\Phi_{12}^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle) \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \quad (1)$$

здесь $|0_{1,2}\rangle,\ |1_{1,2}\rangle \in \mathcal{H}_{1,2}$ – ортонормированные базисные векторы для различимых частиц 1 и 2 и, соответственно, двумерные пространства состояний. Пусть неизвестное квантовое состояние третьей частицы, которое требуется телепортировать, есть

$$|\varphi_3\rangle = \alpha|0_3\rangle + \beta|1_3\rangle \in \mathcal{H}_3. \quad (2)$$

Общее состояние трех разных частиц есть

$$|\varphi_3\rangle \otimes |\Psi_{12}^{+}\rangle \in \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (3)$$

Процесс телепортации сводится к запутанному измерению над частицами 1 и 3. Любое измерение в квантовой механике описывается разложением единицы в некотором пространстве состояний, в нашем случае в $\mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1$

$$I_{123} = I_2 \otimes I_{13} = I_2 \otimes (|\Psi_{13}^{+}\rangle\langle\Psi_{13}^{+}| + \\ + |\Psi_{13}^{-}\rangle\langle\Psi_{13}^{-}| + |\Phi_{13}^{+}\rangle\langle\Phi_{13}^{+}| + |\Phi_{13}^{-}\rangle\langle\Phi_{13}^{-}|), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} |\Phi_{13}^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_3\rangle \pm |1_1\rangle \otimes |1_3\rangle), \\ |\Psi_{13}^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |1_3\rangle \pm |1_1\rangle \otimes |0_3\rangle), \end{aligned} \quad (5)$$

Замечательное наблюдение [2] состоит в том, что совместное состояние трех частиц может быть представлено как

$$|\Psi_{123}\rangle = \frac{1}{2}\{(\alpha|0_2\rangle + \beta|1_2\rangle)| \otimes |\Phi_{13}^{+}\rangle + \quad (6)$$

$$(\alpha|0_2\rangle - \beta|1_2\rangle)| \otimes |\Phi_{13}^{-}\rangle +$$

$$+ (\alpha|1_2\rangle + \beta|0_2\rangle)| \otimes |\Psi_{13}^{+}\rangle + (\alpha|1_2\rangle - \beta|0_2\rangle)| \otimes |\Psi_{13}^{-}\rangle\}.$$

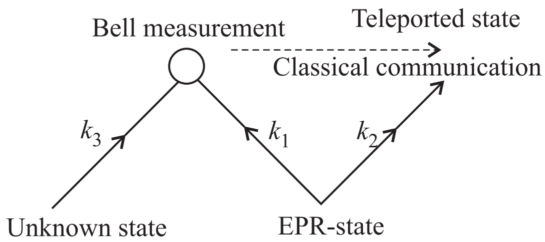
Измерение (4) над состоянием (3) приводит к 4-м равновероятным исходам, отвечающим проекциям на двухчастичные запутанные состояния. После измерения состояние второй частицы оказывается равным одному из следующих состояний, в зависимости от того, какой из 4-х исходов был получен. Имеем

$$|\psi_2^{\pm}\rangle = \frac{\mathrm{Tr}_{13}\{|\Psi_{123}\rangle\langle\Psi_{123}||\Phi_{13}^{\pm}\rangle\langle\Phi_{13}^{\pm}|\}}{\mathrm{Tr}_{123}\{|\Psi_{123}\rangle\langle\Psi_{123}|(I_2 \otimes |\Phi_{13}^{\pm}\rangle\langle\Phi_{13}^{\pm}|)\}} = \\ = \alpha|0_2\rangle \pm \beta|1_2\rangle, \quad (7)$$

$$|\phi_2^{\pm}\rangle = \frac{\mathrm{Tr}_{13}\{|\Psi_{123}\rangle\langle\Psi_{123}||\Psi_{13}^{\pm}\rangle\langle\Psi_{13}^{\pm}|\}}{\mathrm{Tr}_{123}\{|\Psi_{123}\rangle\langle\Psi_{123}|(I_2 \otimes |\Psi_{13}^{\pm}\rangle\langle\Psi_{13}^{\pm}|)\}} = \\ = \alpha|1_2\rangle \pm \beta|0_2\rangle. \quad (8)$$

Нумерация исходов от 1–4 требует 2 бита информации. В зависимости от исхода измерений получателю телепортируемого состояния передаются 2 бита по классическому каналу связи, чтобы совершить один из унитарных поворотов: I – исход 1, σ_z – исход 2, σ_x – исход 3, $\sigma_x\sigma_z$ – исход 4, которые не зависят от исходного состояния. После этого состояние 2-й частицы становится точно равным состоянию исходной частицы 1, которая была в неизвестном состоянии (2).

Телепортация в системе тождественных частиц. Рассмотрим ситуацию с тождественными частицами. Схема эксперимента представлена на рисунке. Кроме поляризационных степеней свободы,



Схематическое представление процесса телепортации

в реальном эксперименте участвуют пространственные степени свободы – три различных направления импульса k_1, k_2 и k_3. Одночастичные состояния обозначим следующим образом

$$|\varphi_J(i)\rangle, \quad \in \mathcal{H}, \quad \Omega_J = \{1H, 1V, 2H, 2V, 3H, 3V\}. \quad (9)$$

Далее для краткости индекс $J = iH$ или $J = iV$ обозначает состояние с волновым вектором k_i и базисными состояниями поляризации H и V. Здесь $\mathcal{H}$ – одночастичное пространство состояний, натянутое на одночастичные функции (9).

Вектор произвольного многочастичного состояния для $n = 0, 1, 2...$ частиц может быть представлен в виде (см., например, [7])

$$|\Phi\rangle = \left(\begin{array}{c} \alpha_{vac}|vac\rangle \\ \sum_{J_1}\alpha_{J_1}|\Phi_{J_1}\rangle \\ \sum_{J_1,J_2}\alpha_{J_1,J_2}|\Phi_{J_1,J_2}\rangle \\ .... \\ \sum_{J_1,J_2,..J_n}\alpha_{J_1,J_2,..J_n}|\Phi_{J_1,J_2,..J_n}\rangle \\ .... \end{array} \right),$$

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = |\alpha_{vac}|^2 + \sum_{J_1}|\alpha_{J_1}|^2 + ...$$
$$+ \ldots \sum_{J_1,J_2,..J_n}|\alpha_{J_1,J_2,..J_n}|^2 + ... = 1, \qquad (10)$$

где компонента вектора состояний с n–фотонами имеет вид

$$|\Phi_{J_1,J_2,..J_n}\rangle =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{\mathcal{P}_n}|\varphi_{J_1}(i_1)\rangle\otimes|\varphi_{J_2}(i_2)\rangle\otimes ....|\varphi_{J_n}(i_n)\rangle, \quad (11)$$

индекс i_k в аргументе функций в (11) обозначает номер частицы, и n- частичная перестановка

$$\mathcal{P}_n = \left(\begin{array}{cccc} J_1 & J_2 & ... & J_n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{array} \right), \quad J_k\in\Omega_J, \quad k=0,1...n. \qquad (12)$$

Пусть неизвестное одночастичное квантовое состояние имеет вид

$$|\varphi_{(1)}\rangle = \alpha|\varphi_{3H}(i_3)\rangle + \beta|\varphi_{3V}(i_3)\rangle, \qquad (13)$$

где нижний индекс (1) означает, что вектор состояния относится к одночастичному пространству.

Для приготовления запутанного состояния ЭПР-пары в эксперименте используется процесс параметрической конверсии вниз по энергии, в результате получается ЭПР- состояние вида

$$|\Phi^+_{(2)}\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{P}_2}(|\varphi_{1H}(i_1)\rangle\otimes|\varphi_{2H}(i_2)\rangle +$$
$$+ |\varphi_{1V}(i_1)\rangle\otimes|\varphi_{2V}(i_2)\rangle), \qquad (14)$$

которое естественно симметрично относительно перестановки частиц.

Для трех тождественных частиц вектор состояния также должен быть симметричным по перестановкам всех трех частиц, имеем

$$|\Psi_{(3)}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sum_{\mathcal{P}_3}|\varphi_{(1)}\rangle\otimes|\Phi^+_{(2)}\rangle = \qquad (15)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big((\alpha|\varphi_{3H}(3)\rangle + \beta|\varphi_{3V}(3)\rangle)\otimes$$

$$\otimes\sum_{\mathcal{P}_2}(|\varphi_{1H}(i_1)\rangle\otimes|\varphi_{2H}(i_2)\rangle + |\varphi_{1V}(i_1)\rangle\otimes|\varphi_{2V}(i_2)\rangle)+$$

$$+(\alpha|\varphi_{3H}(2)\rangle + \beta|\varphi_{3V}(2)\rangle)\otimes$$

$$+\sum_{\mathcal{P}_2}(|\varphi_{1H}(i_1)\rangle\otimes|\varphi_{2H}(i_3)\rangle + |\varphi_{1V}(i_1)\rangle\otimes|\varphi_{2V}(i_3)\rangle)+$$

$$(\alpha|\varphi_{3H}(1)\rangle + \beta|\varphi_{3V}(1)\rangle)\otimes$$

$$\otimes\sum_{\mathcal{P}_2}(|\varphi_{1H}(i_3)\rangle\otimes|\varphi_{2H}(i_2)\rangle + |\varphi_{1V}(i_3)\rangle\otimes|\varphi_{2V}(i_2)\rangle)\Big).$$

В (15) можно перегруппировать слагаемые следующим образом

$$|\Psi_{123}\rangle = \qquad (16)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\sum_{\mathcal{P}_3}\big((\alpha|\varphi_{2H}(i_1)\rangle + \beta|\varphi_{2V}(i_1)\rangle)\otimes$$

$$\otimes(|\varphi_{1H}(i_2)\rangle\otimes|\varphi_{3H}(i_3)\rangle + |\varphi_{1V}(i_2)\rangle\otimes|\varphi_{3V}(i_3)\rangle)+$$

$$+(\alpha|\varphi_{2H}(i_1)\rangle - \beta|\varphi_{2V}(i_1)\rangle)\otimes$$

$$\otimes(|\varphi_{1H}(i_2)\rangle\otimes|\varphi_{3H}(i_3)\rangle - |\varphi_{1V}(i_2)\rangle\otimes|\varphi_{3V}(i_3)\rangle)+$$

$$+(\alpha|\varphi_{2V}(i_1)\rangle + \beta|\varphi_{2H}(i_1)\rangle)\otimes$$

$$\otimes(|\varphi_{1H}(i_2)\rangle\otimes|\varphi_{3V}(i_3)\rangle + |\varphi_{3V}(i_2)\rangle\otimes|\varphi_{1H}(i_3)\rangle)+$$

$$+(\alpha|\varphi_{2V}(i_1)\rangle - \beta|\varphi_{2H}(i_1)\rangle)\otimes$$

$$\otimes(|\varphi_{1H}(i_2)\rangle\otimes|\varphi_{3V}(i_3)\rangle - |\varphi_{3V}(i_2)\rangle\otimes|\varphi_{1H}(i_3)\rangle).$$

В эксперименте [5] реализованы измерения в полном белловском базисе, для этого приходится прибегать к параметрической конверсии вверх по энергии (см. детали в [5, 8]). С формальной точки зрения любое измерение в квантовой механике описывается разложением единицы. Для тождественных частиц операторы в $\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}$, реализующие разложение единицы, должны быть симметричными по перестановкам частиц. Имеем

$$I_{\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}} = I^{\perp Bell}_{\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}} + |\Psi^+_{(2)}\rangle\langle\Psi^+_{(2)}| +$$
$$+ |\Psi^-_{(2)}\rangle\langle\Psi^-_{(2)}| + |\Phi^+_{(2)}\rangle\langle\Phi^+_{(2)}| + |\Phi^-_{(2)}\rangle\langle\Phi^-_{(2)}|; \qquad (17)$$

здесь $I^{\perp Bell}_{\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}}$ – единичный оператор в подпространстве, натянутом на векторы, ортогональные белловским состояниям:

$$|\Phi^{\pm}_{(2)}\rangle = \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{\mathcal{P}_2} |\varphi_{1H}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{3H}(i_2)\rangle \pm \pm \sum_{\mathcal{P}_2} |\varphi_{1V}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{3V}(i_2)\rangle \Bigg), \tag{18}$$

$$|\Psi^{\pm}_{(2)}\rangle = \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{\mathcal{P}_2} |\varphi_{1H}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{3V}(i_2)\rangle \pm \pm \sum_{\mathcal{P}_2} |\varphi_{1V}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{3H}(i_2)\rangle \Bigg). \tag{19}$$

Отметим, что состояния в (18), (19) представляют собой сумму или разность двух слагаемых симметричных относительно перестановки частиц, не изменяют знака при перестановке частиц, в отличие от состояний в (5) для различимых частиц $|\Psi^-_{13}\rangle$ и $|\Phi^-_{13}\rangle$, которые антисимметричны относительно перестановки кубитов 1 и 3.

Измерения в эксперименте [5] устроены таким образом, что возникают только исходы в четырех каналах, отвечающих проекциям на белловские состояния в (17).

После измерений одночастичное состояние оказывается равным

$$|\psi^{\pm}_{(1)}\rangle = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}}\{|\Psi_{(3)}\rangle\langle\Psi_{(3)}||\Phi^{\pm}_{(2)}\rangle\langle\Phi^{\pm}_{(2)}|\}}{\mathrm{Tr}_{\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 3}\}}\{|\Psi_{(3)}\rangle\langle\Psi_{(3)}|(|\Phi^{\pm}_{(2)}\rangle\langle\Phi^{\pm}_{(2)}|)\}} = = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{\mathcal{P}_1}(\alpha|\varphi_{2H}(i_1)\rangle \pm \beta|\varphi_{2V}(i_1)\rangle), \tag{20}$$

$$|\phi^{\pm}_{(1)}\rangle = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}}\{|\Psi_{(3)}\rangle\langle\Psi_{(3)}||\Psi^{\pm}_{(2)}\rangle\langle\Psi^{\pm}_{(2)}|\}}{\mathrm{Tr}_{\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 3}\}}\{|\Psi_{(3)}\rangle\langle\Psi_{(3)}|(|\Psi^{\pm}_{(2)}\rangle\langle\Psi^{\pm}_{(2)}|)\}} = = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{\mathcal{P}_1}(\alpha|\varphi_{2V}(i_1)\rangle \pm \beta|\varphi_{2H}(i_1)\rangle). \tag{21}$$

Поскольку частицы неразличимы (формально индекс частицы под знаком суммы является "немым"), то одночастичные состояния (20), (21) могут быть представлены как

$$|\psi^{\pm}_{(1)}\rangle = (\alpha|\varphi_{2V}(i)\rangle \pm \beta|\varphi_{2H}(i)\rangle) \to \alpha|0\rangle \pm \beta|1\rangle, \tag{22}$$

$$|\phi^{\pm}_{(1)}\rangle = (\alpha|\varphi_{2H}(i)\rangle \pm \beta|\varphi_{2V}(i)\rangle) \to \alpha|1\rangle \pm \beta|0\rangle. \tag{23}$$

Далее в зависимости от исхода, аналогично случаю для различимых частиц, происходит унитарный поворот состояния в (20), (21). После такого поворота телепортированное состояние оказывается идентичным исходному неизвестному состоянию (13).

Таким образом, телепортация в системе тождественных частиц имеет место и аналогична телепортации для различимых частиц. Это оказывается возможным за счет того, что в экспериментальной ситуации, кроме поляризационных степеней свободы, существенную роль играют три различных направления импульса фотонов. В результате размерность двухчастичного пространства состояний, симметризованного по перестановкам частиц, оказывается равной 10. В эксперименте актуально только 4-мерное подпространство состояний из 10-мерного, в котором симметричные двухчастичные состояния являются аналогичными базисным белловским состояниям в двухчастичном пространстве двух различимых частиц. В результате процесс телепортации физически становится полностью эквивалентным процессу телепортации в системе трех различимых частиц [2]. Еще раз отметим, что телепортация без учета пространственных степеней свободы в системе трех тождественных кубитов (двухуровневых квантовых систем) из-за того, что размерность двухчастичного пространства состояний равна трем, а не четырем как для различимых кубитов, оказывается невозможной.

Авторы выражают признательность М.В. Федорову за обсуждение результатов. Один авторов (С.Н.М) выражает благодарность коллегам по Академии Криптографии Российской Федерации за постоянную поддержку. Работа частично поддержана проектом Российского фонда фундаментальных исследований # 08-02-00559 и # 10-02-90036-Бел.

1. W.K. Wotters and W.H. Zurek, Nature **299**, 802 (1982).
2. C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
3. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
4. D. Bouwmeester, J-W. Pan, K. Mattle et al., Nature (London) **390**, 575 (1997); D. Boschi1, S. Branca1, F. De Martini1 et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 1121 (1998); A. Furusawa, J.L. Sorensen, S.L. Braunstein et al., Science **282**, 706 (1998).
5. Yoon-Ho Kim, Sergei P. Kulik, and Yanhua Shih, Phys. Rev. Lett. **86**, 1370 (2001).
6. A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1995.
7. Ф. Березин, *Метод вторичного квантования*, (изд. 2), М.: Наука, 1986.
8. С.Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **68**, 248 (1998).