Письма в ЖЭТФ, том 92, вып. 4, с. 226 – 232

О дробно-дифференциальных моделях ускорения космических лучей в Галактике

В. В. Учайкин[1)]

Ульяновский госуниверситет, 432000 Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 15 июня 2010 г.

После переработки 14 июля 2010 г.

Рассматриваются возможные формулировки задачи об ускорении космических лучей в межзвездной галактической среде с использованием уравнений с дробными производными. Дается физическое обоснование применяемому аппарату. Найдено обобщение результата Ферми на случай ускорения частиц в ударных волнах на остатках сверхновых, фрактально распределенных в Галактике.

1. Введение. В предыдущей статье [1] на основе представлений CTRW (Continuous Time Random Walk) модели обсуждался физический смысл дробно-дифференциального уравнения

$$\left[{}_0\mathsf{D}_t^{\beta} + D(-\triangle)^{\alpha/2}\right]\psi(\mathbf{x},t) = \delta(\mathbf{x})\delta_\beta(t),\ \delta_\beta(t) \equiv$$

$$\equiv t_+^{-\beta}/\Gamma(1-\beta),\ \alpha \in (0,2],\ \beta \in (0,1], \qquad (1)$$

в связи с проблемами, возникшими при его применении к описанию переноса космических лучей в Галактике. В настоящей работе CTRW-подход рассматривается применительно к описанию ускорения (точнее, доускорения) космических лучей. В отличие от предыдущей задачи, речь идет теперь о поведении частиц *в импульсном пространстве*. Последовательные взаимодействия (*столкновения*) заряженной частицы с более или менее локализованными неоднородностями магнитного поля – от движущихся с относительно небольшой скоростью магнитных облаков, которые имел в виду Ферми в своих пионерских работах [2], до сильных ударных волн в остатках сверхновых, о которых идет речь в обзоре Бережко и Крымского [3], можно рассматривать как *мгновенные перелеты из одной точки импульсного пространства в другую*. Приобретаемые частицей в результате таких столкновений импульсы $\Delta\mathbf{p}_i$ являются случайными, и даже при изотропном их распределении представляющая частицу в импульсном пространстве точка

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 + \Delta\mathbf{p}_3 + \ldots,$$

подобно броуновской частице, все дальше уходит от точки (импульса) инжекции ускорения $\mathbf{p}_0$, что и означает дальнейшее ускорение (доускорение) частицы. Ускоряется правда, лишь некоторая доля частиц, перемещающаяся в направлениях от центра. Эта-то *флуктуационная* составляющая механизма ускорения космических лучей и является предметом внимания настоящей работы.

Со статистической точки зрения, главный итог вывода Ферми в том, что для формирования степенного энергетического спектра $N(E)$ достаточно экспоненциального роста энергии ускоряемой частицы $E = E_0e^{at}$ со временем и экспоненциального распределения возраста $d\mathsf{P} = \exp(-t/\tau)dt/\tau$ регистрируемых частиц:

$$N(E)dE \equiv N(E;\tau)dE =$$

$$= \tau^{-1}\left[\int\limits_0^\infty \delta(E - E_0e^{at})e^{-t/\tau}dt\right]dE =$$

$$= \frac{1}{a\tau}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-1-1/a\tau}\frac{dE}{E_0}, \quad E > E_0. \qquad (2)$$

И все. Никаких флуктуаций (кроме указанных флуктуаций возраста, определяемых параметром τ – средним значением этого возраста)! Да это и понятно: о каких флуктуациях может идти речь, если на приращение энергии в e раз, по оценкам Ферми, уходит 100 миллионов столкновений?

Чтобы исследовать влияние на энергетический спектр ускоренных частиц других источников флуктуаций, необходимо рассмотреть процессы с большими возможностями ускорения в каждом из столкновений и меньшей их частотой. К числу таких процессов относятся упоминавшиеся выше взаимодействия с сильными ударными волнами, когда даже при однократном взаимодействии с фронтом возможно увеличение энергии частицы в 7–13 раз (см. [4], с. 449). С этой целью мы перейдем от вырожденной спектральной функции $\delta(E - E_0e^{at})$, характеризующей детерминированный процесс ускорения Ферми, к непре-

[1)]e-mail: vuchaikin@gmail.com

рывной $n(E,t)$, связанной с импульсным распределением $f(\mathbf{p},t)$ соотношением

$$n(E,t)=\int\delta(E-E(\mathbf{p}))f(\mathbf{p},t)d\mathbf{p}.$$

Полагая, как и Ферми, параметр τ не зависящим от энергии, представим искомый спектр в виде

$$N(E)\equiv N(E;\tau)=\tau^{-1}\left[\int\limits_0^\infty n(E,t)e^{-t/\tau}dt\right]=$$
$$=\tau^{-1}\widehat{n}(E,\tau^{-1}), \qquad (3)$$

где

$$\widehat{n}(E,\lambda)\equiv\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}n(E,t)dt$$

– трансформанта Лапласа спектральной функции по временной переменной. Учет влияния кинетических флуктуаций осуществляется теперь на этапе составления уравнений для распределений $f(\mathbf{p},t)$ или $n(E,t)$ путем включения дополнительных слагаемых, содержащих дифференциальные и интегральные операторы. В настоящее время процесс развития теории ускорения космических лучей продолжается, и главный вопрос, на котором мы сконцентрируем здесь внимание: какую роль в этом процессе могут сыграть дробные производные?

2. Дробно-дифференциальное кинетическое уравнение. Как отмечалось в [1], уравнение (1) является диффузионным пределом координатной ($\mathbf{x}$-CTRW) модели, в которой траектория частицы представляет собой последовательность мгновенных перескоков в случайные моменты времени на случайные расстояния, в промежутках между которыми частица неподвижна. CTRW-модель с конечной скоростью свободного движения приводит к качественно новым результатам (см., например, [5]). При анализе ускорения космических лучей в первом приближении рассматривается стохастическая динамика частицы в скоростном (импульсном или энергетическом) пространстве, учет же ограниченности координатного пространства осуществляется коррекцией среднего возраста τ или введением дополнительных коэффициентов, характеризующих утечку частиц из области ускорения или из Галактики в целом.

В импульсном пространстве неподвижное положение точки, не совпадающее с началом координат, означает движение частицы с постоянным импульсом (скоростью, энергией). Показатель β характеризует теперь хвостовую часть распределения случайной длительности интервала ΔT между последовательными столкновениями движущейся частицы $Q(t)=\mathsf{P}(\Delta T>t)$, $t\to\infty$. Для ультрарелятивистской частицы ($v\approx c$) интервал этот пропорционален ее пробегу между последовательными столкновениями, так что новые значения β должны соответствовать значениям α в предыдущей $\mathbf{x}$-CTRW-модели. Ввиду этого, начнем обсуждение с системы CTRW-уравнений (2)–(4) работы [1], в которых координаты $\mathbf{r}$ заменены импульсами $\mathbf{p}$, скорость изменения импульса v принята бесконечной, и частица предполагается инжектированной источником в момент $t=0$ с распределением $f_0(\mathbf{p})$:

$$f(\mathbf{p},t)=\int\limits_0^t Q(t-t')F_{0\leftarrow1}(\mathbf{p},t')dt', \qquad (4a)$$

$$F_{0\leftarrow1}(\mathbf{p},t)=\int w(\mathbf{p}\leftarrow\mathbf{p}')F_{1\leftarrow0}(\mathbf{p}',t)d\mathbf{p}'+f_0(\mathbf{p})\delta(t), \qquad (4b)$$

$$F_{1\leftarrow0}(\mathbf{p},t)=\int\limits_0^t q(t-t')F_{0\leftarrow1}(\mathbf{p},t')dt'. \qquad (4c)$$

Дальнейшее преобразование системы связано с конкретизацией распределений $q(t)$ и $w(\mathbf{p}\leftarrow\mathbf{p}')$. Начнем с временного распределения. Обычно (можно сказать, всегда) в качестве такового выбирается экспоненциальное распределение $Q(t)=e^{-\mu t}$, $q(t)\equiv -dQ/dt=\mu e^{-\mu t}$ и, как правило, делается это в неявной форме: уравнение переноса начинают писать с производной по времени $\partial f(\mathbf{p},t)/\partial t=\ldots$, подразумевая марковость процесса, автоматически приводящую к экспоненциальному распределению. Никто, однако, не сможет ответить на вопрос, каково реальное распределение интервалов времени между столкновениями. Можно предположить, например, что оно вовсе не экспоненциальное, а, допустим, степенное: $Q(t)\propto t^{-\alpha}$. Это вполне согласуется с самоподобной картиной турбулентных движений, с ее степенными закономерностями.

Гипотеза о фрактальном характере межзвездной среды [6] также ведёт к степенным распределениям. В принципе, речь идет о поведении магнитных силовых линий в межзвездном пространстве. Обычно мы представляем их как относительно плавные линии, в некоторых местах упирающиеся в магнитные пробки, пересекающиеся с другими, резко меняющие свои направления и сами выполняющие со временем "диффузионный танец". Вдоль них и движутся "ведущие центры" движущихся по винтовым траекториям частиц. Так вот, если по мере увеличения обзора и соответствующего уменьшения масштаба эти плавные отрезки перестают быть заметными и хаотичность структуры становится основной доминантной, мы имеем асимптотически однородную среду, пробеги в которой можно моделировать обычной экспонентой. Если же по мере увеличения обзора в его поле попадают отрезки линий все больших размеров, замещающие собой те, которые стали теперь малыми в результате уменьшения масштаба, так что (качественно, конечно) структура внешне не изменилась, то это и есть фрактальная структура. В этих условиях ожидать экспоненциального распределения пробегов, характерного для сильно перемешанных сред, особых оснований нет, но и категорически отвергнуть такую возможность также нельзя.

Лучшим компромиссом было бы семейство распределений, включающее в себя как экспоненциальное, так и степенные распределения. К счастью, такое семейство существует: это множество функций

$$Q_\alpha(t) = E_\alpha(-\mu t^\alpha), \quad \alpha \in (0,1],$$

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\alpha n + 1)$$

– функции Миттаг–Леффлера. При $\alpha = 1$ функция $Q_\alpha(t)$ становится обычной экспонентой, а при $\alpha < 1$ эта "дробная экспонента" характеризуется степенной асимптотикой порядка $t^{-\alpha}$, $t \to \infty$. Соответствующая ей плотность $q_\alpha(t)$ сама удовлетворяет дробно-дифференциальному уравнению [7], что и приводит к дробно-дифференциальному (по времени) виду всю систему (4):

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha f(\mathbf{p},t) = \mu \mathsf{A} f(\mathbf{p},t) + f_0(\mathbf{p})\delta_\alpha(t). \tag{5}$$

Здесь

$$\mathsf{A} f(\mathbf{p},t) = \int w(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}') f(\mathbf{p}',t) d\mathbf{p}' - f(\mathbf{p},t) \tag{6}$$

– интегральный оператор ускорения с плотностью переходов $w(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')$. Временная последовательность моментов столкновений образует *дробный пуассоновский процесс порядка* α [7], при $\alpha = 1$ превращающийся в обычный пуассоновский процесс, лежащий в основе классического кинетического уравнения (21.1) [8]. Проведенные в [9] исследования показали качественно новое свойство этого процесса: среднее число столкновений растет медленнее, чем в обычном случае (по закону t^α вместо t), а относительные флуктуации числа столкновений при $t \to \infty$ не исчезают, а стремятся к зависящему от α предельному распределению (своего рода KNO – скейлинг).

Переход от первой производной по времени к дробной порядка $\alpha < 1$ не требует специального решения уравнения с дробной производной: удобнее воспользоваться соотношением, связывающим решения уравнений (5) с $\alpha < 1$ и $\alpha = 1$ [7]:

$$f_\alpha(\mathbf{p},t) = (t/\alpha) \int_0^\infty f_1(\mathbf{p},\tau) g_+(t\tau^{-1/\alpha};\alpha) \tau^{-1/\alpha - 1} d\tau. \tag{7}$$

Здесь $g_+(t;\alpha)$ – односторонняя устойчивая (в смысле Леви) плотность вероятности с трансформантой Лапласа

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda t) g_+(t;\alpha) dt = \exp(-\lambda^\alpha),$$

а t, τ и λ – обезразмеренные переменные. Выполняя над соотношением (7) преобразование Лапласа по времени и пользуясь приведенными выше формулами для спектров, можно прийти к формуле

$$N_\alpha(E;\tau) = N_1(E;\tau^\alpha). \tag{8}$$

Она отражает влияние *фрактальной размерности дробно-пуассоновского процесса столкновений* $\alpha \in (0,1]$ на энергетический спектр космических лучей: спектр $N_\alpha(E;\tau)$, образуемый ансамблем частиц со средним временем жизни τ, ускоряющихся по дробно-пуассоновскому закону порядка $\alpha < 1$, совпадает со спектром частиц, ускоренных обычным пуассоновским процессом ($\alpha = 1$), но имеющих средний возраст τ^α (напомним, время здесь обезразмерено, а спектры инжекции $f_0(E)$ в обеих задачах совпадают). На примере спектра Ферми легко убедиться, что с понижением порядка процесса эффективность ускорения падает (спектр укручается). Фрактальный характер распределения ускоряющих областей в пространстве естественно снижает эффективность ускорения.

3. Дробно-дифференциальные уравнения Фоккера–Планка. Как и в классическом случае, переход от кинетического уравнения к уравнению Фоккера–Планка связан с преобразованием интеграла столкновений в дифференциальную форму путем разложения подынтегральной функции в ряд по приращению импульса до членов второго порядка включительно. При этом существуют две версии такого разложения, ведущих к несколько различающимся между собой уравнениям (см., например,[8]). В первой предполагается малой *абсолютная величина изменения* импульса $|\Delta\mathbf{p}| = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$, так что импульс налетающей частицы лишь чуть-чуть изменяется по величине и направлению в одном акте столкновения (как это имеет место, например, при столкновении тяжелой частицы с легкой). Во второй версии предполагается малым *изменение абсолютной величины* импульса $\Delta p = |\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|$, изменение же его направления может иметь сколь угодно широкое распределение вплоть до изотропного (столкновение легкой частицы с тяжелой). В предположении об изотропном рассеянии получим дробно-дифференциальное обобщение уравнения Фоккера–Планка в виде

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha f(p,t) = \triangle_{\mathbf{p}}(K(p)f(p,t)) + f_0(p)\delta_\alpha(t), \tag{9}$$

где

$$K(p) = (\mu/2)\int(\Delta\mathbf{p})^2 w(\Delta\mathbf{p};p)d\Delta\mathbf{p}$$

– коэффициент диффузии в импульсном пространстве. Хорошо известен в физике космических лучей энергетический аналог уравнения (9) (при $\alpha = 1$, конечно):

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha n(E,t) = \tag{10}$$

$$= \frac{\partial[a_1(E)n(E,t)]}{\partial E} + \frac{\partial^2[a_2(E)n(E,t)]}{\partial E^2} + n_0(E)\delta_\alpha(t)$$

(см. уравнение (14.2) книги [10]).

В то же время, уравнение (9) с диффузионным членом

$$\triangle_{\mathbf{p}}(K(p)f(p,t)) = (\triangle_{\mathbf{p}}K(p))f(p,t)+$$

$$+2(\nabla_{\mathbf{p}}K(p))\nabla_{\mathbf{p}}f(p,t) + K(p)\triangle_{\mathbf{p}}f(p,t)$$

существенно отличается от другого уравнения диффузионного типа (см. (9.57), [11])

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha f(p,t) = \nabla_{\mathbf{p}}(K(p)\nabla_{\mathbf{p}}f(p,t)) + f_0(p)\delta_\alpha(t). \tag{11}$$

Причина отличия в том, что уравнение (9) выведено в модели столкновений, когда представляющая частицу точка мгновенно перемещается в другую, может быть, далекую геометрическую точку, нарушая непрерывность траектории в импульсном пространстве, тогда как при динамическом выводе уравнения (11) траектория в импульсном пространстве предполагалась непрерывной и даже дифференцируемой.

Классические версии (с $\alpha = 1$) уравнений (9)–(11) лежат в основе стандартного набора математических средств, описывающих флуктуационные механизмы ускорения космических лучей, решения их хорошо известны [4, 10, 11]. Общей чертой этих моделей является гауссов характер импульсных распределений, обусловленный предположением о том, что входящий в диффузионный коэффициент второй момент приобретаемого в ускорительном акте импульса конечен, и медленный темп ускорения. Замена в этом уравнении первой производной по времени ее дробным аналогом с показателем $\alpha \in (0,1)$ не приводит к повышению эффективности ускорения; наоборот, темп ускорения в субдиффузионном режиме еще более падает. Уместно напомнить также, что встречающееся в некоторых работах утверждение, что при $\alpha > 1$ мы переходим к ускоренной диффузии, не соответствует реальности. Основанный на *лингвистической* интуиции (“если $\alpha < 1$ означает субдиффузию, $\alpha = 1$ – нормальную диффузию, то $\alpha > 1$ должно соответствовать супердиффузии, а как же иначе?”), вывод этот неверен потому, что при $\alpha > 1$ теряется вероятностный смысл решения $f(p,t)$: оно перестает быть положительно определенным.

Итак, с физической точки зрения переход к дробной производной по времени (при неизменной остальной, диффузионной части уравнения) как способ усиления высокоэнергетической части спектра бесперспективен. В то же время, параметр α отражает наличие возможных корреляций в пространственном распределении областей ускорения, и в этом качестве может оказаться полезен (напомню, что при $\alpha = 1$ мы имеем дело с равномерно-пуассоновским распределением таких областей, не коррелирующих друг с другом). Сохранить этот параметр и повысить эффективность механизма многократного ускорения можно только модификацией другого оператора уравнения, точнее, возвращением от дифференциальной формы ускорительного оператора, описывающей непрерывный медленный набор энергии, к интегральной форме, описывающей ускорение как последовательность актов с большими мгновенными (в рассматриваемых “галактических” масштабах времени) изменениями импульсов. Эти соображения наводят на мысль о замене импульсного лапласиана его дробным аналогом, ибо дробный лапласиан как раз и содержит интегральный по импульсам оператор с обратностепенным ядром, могущий обеспечить высокий темп ускорения. Рассмотрим этот вариант подробнее.

В задаче о потерях энергии быстрой заряженной частицей в среде, откуда принесены уравнения типа (10) (с $\alpha = 1$, естественно), потери энергии частицы не могут превысить ее начальную энергию, и все моменты потерь энергии конечны. В задаче же об ускорении столь определенного предела приращения энергии не существует, что дает дополнительные основания заглянуть в область с бесконечной дисперсией, приобретающую все большую популярность среди исследователей аномальных диффузионных процессов. Содержательные (в асимптотическом смысле) результаты при этом получаются лишь в случае, когда бесконечность дисперсии обусловлена степенным характером распределений:

$$\int\limits_{|\Delta\mathbf{p}|>p} w(\Delta\mathbf{p};\mathbf{p}')d\Delta\mathbf{p} \propto p^{-\gamma},\ p\to\infty. \qquad (12)$$

Если показатель $\gamma > 2$, второй момент конечен,и мы находимся в "классической" диффузионной области. Если же $\gamma < 2$, второй момент приращения бесконечен, и мы приходим к модели *аддитивных блужданий Леви*. В этом случае вполне естественными представляются следующие из асимптотического CTRW анализа уравнения для распределений по импульсам $f(p,t)$ и энергиям $n(E,t)$ вида

$${}_0\mathsf{D}_t^\alpha f(p,t) = -K(-\triangle_{\mathbf{p}})^{\nu/2} f(p,t) + f_0(p)\delta_\alpha(t), \quad (13)$$

и

$${}_0\mathsf{D}_t^\alpha n(E,t) =$$

$$= \begin{cases} \partial^\nu[a_\nu n(E,t)]/\partial E^\nu + n_0(E)\delta_\alpha(t), & 0<\nu<1; \\ \partial[a_1 n(E,t)]/\partial E + \\ +\partial^\nu[a_\nu n(E,t)]/\partial E^\nu + n_0(E)\delta_\alpha(t), & 1<\nu<2. \end{cases} \qquad (14)$$

Здесь

$$\nu = \begin{cases} \gamma, & \gamma\le 2; \\ 2, & \gamma>2, \end{cases}$$

$\partial^\nu/\partial E^\nu$ – более близкое к привычному обозначение дробного дифференциального оператора ${}_0\mathsf{D}_E^\nu$, а коэффициенты K, a_1 и a_ν – постоянны. Последнее обстоятельство (постоянство коэффициентов) весьма существенно для самого вывода уравнений. Как правило, вывод дробно-дифференциальных уравнений идет с применением интегральных преобразований, непременным условием применимости которых как раз и является постоянство коэффициентов. Вывести таким образом, скажем, уравнение (13), а затем поставить перед дробным лапласианом переменный коэффициент диффузии $K(p)$ было бы совсем неправильно (в этом можно убедиться даже на примере уравнений (9)–(11) с целым лапласианом).

В уравнении (14) явственно просматривается оборванное на "ν-м" члене разложение в ряд функции, равной нулю в опорной точке, и может создаться впечатление, что отбросив следующий (расходящийся!) член, мы допустили бесконечную ошибку, но это не так. Мы пользуемся *формулой Тэйлора*, а не бесконечным рядом Тэйлора, и имеем право продолжать разложение только до тех пор, пока производные существуют, после чего мы должны записать остаточный член, который всегда конечен. Если бы следующая производная существовала, ее учет в продолженном разложении означал бы просто приближенную аппроксимацию остаточного члена. Если же таковая не существует, мы, естественно, не можем пользоваться ею для аппроксимации остаточного члена и вынуждены вернуться на исходные позиции, где аппроксимирующую роль берет на себя производная предыдущего порядка.

Описываемый уравнением (13) диффузионный пакет, распространяющийся из начала импульсных координат, имеет вид трехмерного изотропного дробно-устойчивого распределения $\psi_3^{(\nu,\alpha)}$, $\nu\in(0,2]$, $\alpha\in(0,1]$, расплывающегося по закону $t^{\alpha/\nu}$:

$$f(p,t) = (Kt^\alpha)^{-3/\nu}\psi_3^{(\nu,\alpha)}((Kt^\alpha)^{-1/\nu}p).$$

"Хвосты" (или, более романтично, "крылья") этого распределения имеют степенной вид с показателем ν. Физически это означает своеобразный эффект лидирования: в сумме $\Delta\mathbf{p}_1+\Delta\mathbf{p}_2+\dots+\Delta\mathbf{p}_n$ большого числа независимых слагаемых главную роль всегда играет один из них; этот эффект исчезает при $\nu=2$, когда распределение становится гауссовым (субгауссовым). В результате, при $\nu<2$ получаем спектр в форме

$$N_1(E)dE \propto E^{-\nu-1}dE,$$

только внешне похожей на формулу Ферми. Главное отличие в том, что показатель ν здесь не связан с возрастом регистрируемых частиц, а целиком определяется только механизмом ускорения в отдельном локальном событии (столкновении). По этой причине фрактальность распределения ускоряющих областей в пространстве тоже никак не влияет на наклон получающегося спектра.

4. Интегро-дробно-дифференциальная модель. Недостаток модели с дробным импульсным лапласианом в том, что приращения импульса в акте ускорения не зависят от величины импульса частицы, вступающей во взаимодействие, тогда как и в модели Ферми, и в более поздних ее вариантах приращения энергии (а, стало быть, и импульса) в среднем пропорциональны энергии (импульсу) частицы перед взаимодействием. В этом случае энергия ускоренной частицы выражается не суммой, а произведением независимых случайных величин. Назовем такую модель *мультипликативным блужданием*, чтобы отличать ее от модели *аддитивного блуждания*, рассмотренной выше.

В мультипликативной модели приращение импульса пропорционально (в статистическом смысле) абсолютной величине самого импульса частицы p', вступающей во взаимодействие,

$$\Delta\mathbf{p} = p'\mathbf{q}, \quad \int\limits_{|\Delta\mathbf{p}|>p} w(\Delta\mathbf{p};\mathbf{p}')d\Delta\mathbf{p} \propto (p/p')^{-\gamma}, \ p\to\infty. \tag{15}$$

Полагая распределение вектора пропорциональности $\mathbf{q}$ не зависящим от $\mathbf{p}'$ и изотропным ($W(\mathbf{q};\mathbf{p}')d\mathbf{q} = (1/2)V(q)dqd\xi$, $\xi = \cos(\mathbf{q},\mathbf{p})$), преобразуем кинетическое уравнении (5) к виду

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha f(p,t) = $$

$$ =\mu\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\xi}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{V(q)f\left(p\Big/\sqrt{1+2\xi q+q^2},t\right)}{\left(\sqrt{1+2\xi q+q^2}\right)^3}dq - $$

$$ -\mu f(p,t) + f_0(p)\delta_\alpha(t), \tag{16}$$

представляющему новую модель распределенного доускорения, точнее, новую модификацию модели, предложенной в [12,13]. Чтобы приблизить ее к реальным процессам доускорения, например, при пересечении фронтов ударных волн на остатках сверхновых, примем, как это сделано в [13],

$$V(q) = \gamma q^{-\gamma-1}, \quad \gamma > 1.$$

Полученную в результате модель можно назвать *мультипликативными блужданиями Леви*.

Рассмотрим уравнение для спектральной функции в двух крайних случаях. Случай 1: $\gamma > 2$, существует второй момент приращения импульса, пропорциональный E^2, и мы возвращаемся в область классической диффузии с переменными коэффициентами:

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha n(E,t) = $$

$$ = \frac{\partial[a_1 E n(E,t)]}{\partial E} + \frac{\partial^2[a_2 E^2 n(E,t)]}{\partial E^2} + n_0(E)\delta_\alpha(t).$$

Случай 2. Теперь γ меньше двух, но не просто меньше, а много меньше, так, что в уравнении (16) под знаком квадратного корня можно пренебречь всеми членами, кроме q^2.

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha n(E,t) = \tag{17}$$

$$ = \mu\left\{\int\limits_1^\infty \gamma q^{-\gamma-1} n(E/q,t)dq/q - n(E,t)\right\} + n_0(E)\delta_\alpha(t).$$

Я не утверждаю, что это – хорошее приближение, просто именно такой оператор ускорения использовался в работе [13] для конкретных расчетов.

Решив уравнение (17) с применением метода преобразований Меллина–Лапласа и воспользовавшись формулами (3) и (8), для случая моноэнергетического источника ($n(E) = \delta(E - E_0)$) получим:

$$N_\alpha(E;\tau) = \frac{\mu\tau^\alpha\gamma}{(1+\mu\tau^\alpha)^2}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-1-\gamma/(1+\mu\tau^\alpha)}\frac{1}{E_0}. \tag{18}$$

Несмотря на то, что формула (18) выведена в предположениях, весьма упрощающих реальную ситуацию, и имеет в значительной степени качественный характер, она в компактном виде отражает влияние на форму энергетического спектра космических лучей *всех трех источников флуктуационного ускорения*: флуктуаций возраста частицы (параметр τ), флуктуаций числа актов ускорений (параметры α и μ) и флуктуаций энергии, приобретаемой в отдельном акте (параметр γ). Представив масштабный параметр μ в виде $\mu = \tau_{\mathrm{A}}^\alpha$, где τ_{A} – характерный временной интервал между ускорениями частицы на остатках различных сверхновых (напомним, τ – среднее время жизни относительно ядерных столкновений), можно записать абсолютную величину показателя интегрального спектра в более наглядном виде: $\gamma' = 1+\gamma/[1+(\tau/\tau_{\mathrm{A}})^\alpha]$. При $\alpha = 1$ и $\mu\tau \gg 1$ приходим к формуле Ферми (2) с $a = \mu/\gamma$.

5. Заключение. Учитывая, что в процессе ускорения (точнее, доускорения) космических лучей могут играть роль механизмы всех трех перечисленных типов, можно предложить к использованию в анализе этого процесса интегро-дробно-дифференциальное уравнение

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha f(p,t) = \mu_0\nabla_{\mathbf{p}}(K_0(p)\nabla_{\mathbf{p}} f(p,t)) + $$

$$ +\mu_1\triangle_{\mathbf{p}}(K_1(p)f(p,t)) - \mu_2 K_2(-\triangle_{\mathbf{p}})^{\nu/2} f(p,t) + $$

$$ +\mu_3\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\xi}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{V(q)f\left(p\Big/\sqrt{1+2\xi q+q^2},t\right)}{\left(\sqrt{1+2\xi q+q^2}\right)^3}dq - $$

$$ -\mu_3 f(p,t) + f_0(p)\delta_\alpha(t). \tag{19}$$

Слагаемые с коэффициентами μ_0, μ_1, μ_2 и μ_3 отражают последовательно вклады процессов непрерывного ускорения (типа флуктуаций импульса частицы в турбулентной плазме [11, 14]), столкновительных ускорений с конечным вторым моментом (модель блуждающих намагниченных облаков с ограниченным распределением их скорости), столкновительных ускорений аддитивного Леви-типа (12) (то же со степенным распределением скорости облаков) и столкновительных ускорений мультипликативного Леви-типа (15). Еще раз отмечу, что последний оператор, описывающий, в частности, ускорение на ударных волнах в остатках сверхновых, не сводится к дробно-дифференциальному виду, а остается в интегральном виде. Уравнение (19) должно быть дополнено еще членами, учитывающими потери энергии, выход частиц из Галактики и ядерные взаимодействия (фрагментацию).

Впрочем, при решении конкретных задач, как это обычно делается, в уравнении (19) могут быть оставлены лишь доминирующие члены.

Автор благодарен профессору М.И. Панасюку и всем участникам февральского (2010) заседания его семинара (НИИЯФ МГУ) за обсуждение ряда вопросов, связанных с этой работой, В.С. Птускину и Л.Г. Свешниковой за ценные консультации и Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку исследований (грант #10-01-00608).

---

1. В. В.Учайкин, Письма в ЖЭТФ **91**, 115 (2010).
2. E. Fermi, Phys. Rev. **75**, 1169 (1949); Astrophys. Journ. **119**, 1 (1954).
3. Е. Г. Бережко, Г. Ф. Крымский, УФН **154**, 49 (1988).
4. В. С. Березинский, С. В. Буланов, В. Л. Гинзбург и др., *Астрофизика космических лучей*, М.: Наука, 1990.
5. V. V. Uchaikin, Physica A **255**, 65 (1998).
6. А. В. Кулаков, А. А. Румянцев, ДАН **336**, 183 (1994).
7. В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Ульяновск, изд-во "Артишок", 2008.
8. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, М.: Наука, 1979.
9. V. Uchaikin, D. Cahoy, and R. Sibatov, Int.J.Bifurcation and Chaos **18**, 1 (2008).
10. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, *Происхождение космических лучей*, М.: Изд-во АН СССР, 1963.
11. Л. И. Дорман, *Экспериментальные и теоретические основы астрофизики космических лучей*, М.: Наука, 1975.
12. R. D. Blanford and J. R. Ostriker. Apl. J **221**, L20 (1978).
13. A. Wandel, D. Eichler, J. R. Letaw et al., ApJ, **316**, 676 (1987).
14. Б. А. Тверской, ЖЭТФ **52**, 483 (1967).