Письма в ЖЭТФ, том 92, вып. 9, с. 644 – 649

“Bulk-SQUID эффект” в сложной системе как следствие ее неэргодичности

С. Л. Гинзбург, А. В. Накин, Н. Е. Савицкая

Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН
188300 Гатчина, Ленинградская обл., Россия

Поступила в редакцию 17 августа 2010 г.

Теоретически и с помощью компьютерного моделирования изучена динамика фаз в модели дискретного сверхпроводника в случае пропускания через образец постоянного тока величиной, большей суммарного критического тока контактов. Показано, что в этом случае в системе возникает явление bulk-SQUID, а сама система является неэргодичной. Под этим понимается, что динамика системы жестко зависит от начальных условий, а аттракторами для нее являются предельные циклы, каждый из которых имеет свой бассейн притяжения в конфигурационном пространстве начальных условий. Представлен математический способ восстановления эргодичности в изучаемой системе. Также продемонстрировано, что при восстановлении в системе эргодичности явления bulk-SQUID не наблюдается. Показано, что полученные результаты носят достаточно общий характер и описывают поведение целого класса динамических систем.

С момента открытия явления высокотемпературной сверхпроводимости было установлено, что целый ряд высокотемпературных сверхпроводящих материалов реализуется в виде керамики, которую можно представить как систему гранул, связанных между собой джозефсоновскими контактами (дискретный сверхпроводник). Начавшиеся более двух десятилетий назад интенсивные экспериментальные исследования таких материалов были обусловлены, в частности, поиском возможностей создания на их основе точных магнитометрических приборов (СКВИД’ов), работающих при температуре жидкого азота [1]. В создаваемых радиочастотных СКВИД’ах (rf-squid) наблюдалось интереснейшее явление, получившее название bulk-SQUID эффект [2]. Оно состояло в том, что, как можно было судить по отклику системы на внешнее воздействие, вся совокупность джозефсоновских переходов в исследуемом образце керамики начинала работать как единый джозефсоновский контакт. Наиболее вероятным объяснением данного явления можно считать предположение, что в системе связанных между собой джозефсоновских контактов возникала синхронизация, подобно тому, как это может происходить в других динамических системах связанных между собой нелинейных элементов [3].

Несмотря на важность явления bulk-SQUID для практического применения дискретных сверхпроводников, до сих пор не было дано теоретического объяснения данного эффекта. Также до настоящего времени не были проведены эксперименты по обнаружению bulk-SQUID эффекта в керамических образцах при пропускании через них постоянного тока величиной больше суммарного критического тока контактов.

В настоящей работе мы теоретически и с помощью компьютерного моделирования рассмотрим динамику фаз на контактах в модели дискретного сверхпроводника в случае пропускания через образец постоянного тока величиной, большей суммарного критического тока контактов, то есть в режиме, аналогичном тому, в котором работают СКВИДы постоянного тока (dc-squid). Мы покажем, что в этом случае в системе возникает bulk-SQUID эффект, и это проявляется в периодической зависимости от времени генерируемого системой напряжения. Также мы покажем, что исследуемая система является неэргодичной в следующем смысле. В надкритическом режиме возможные траектории системы представляют собой устойчивые предельные циклы, число которых экспоненциально велико. В зависимости от начальных условий в системе реализуется один из возможных циклов. Кроме того, мы рассмотрели модификацию изучаемой системы, которая является эргодичной, и показали, что при восстановлении эргодичности в системе явление bulk-SQUID не наблюдается.

Заметим, что уравнения, которые мы будем использовать для описания дискретного сверхпроводника, представляют собой хорошо известную математическую модель Френкеля-Конторовой в случае большого затухания [4]. Помимо моделирования динамики фаз в дискретных сверхпроводниках, она может использоваться для описания волн зарядовой плотности [5], дислокаций, механических систем [6], процессов в полимерных сетях и т.п. Таким образом, результаты, которые будут описаны ниже, носят достаточно общий характер, описывая поведение целого класса динамических систем.

В качестве модели дискретного сверхпроводника мы рассмотрим двумерный многоконтактный СКВИД с внутренним пространственным беспорядком [7]. Данная система может быть представлена в виде деформированной двумерной решетки, в узлах которой помещены джозефсоновские контакты размером $l \times l$. Ток через контакты течет в направлении оси z (рис.1). Мы будем считать, что переходы

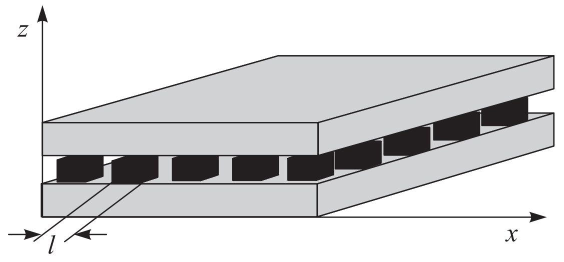

Рис.1. Многоконтактный СКВИД

имеют одинаковую плотность критического тока j_c, и для представления джозефсоновского тока будем использовать резистивную модель джозефсоновского перехода в случае большого затухания [8]. Тогда динамика фаз на контактах φ_i описывается уравнениями Максвелла на решетке, которые в безразмерной форме имеют следующий вид [9]:

$$V\sin(\varphi_i)+\tau\frac{d\varphi_i}{dt}=\sum_j J_{ij}\varphi_j-\sum_j J_{ji}\varphi_i+2\pi F_i,\qquad V=\frac{16\pi^2 l^2\lambda_L j_c}{\Phi_0}, \tag{1}$$

где индекс i обозначает номер контакта в решетке или его двумерную координату (x_i, y_i), λ_L – лондоновская глубина проникновения, Φ_0 – квант магнитного потока, τ – характерное время срабатывания джозефсоновского контакта, которое мы в дальнейшем положим $\tau = 1$, F_i – безразмерный ток, инжектируемый в i-й контакт. Величины J_{ij} характеризуют взаимодействие между контактами в решетке и зависят от расстояний между ними. Физически они определяют величину тока, переходящего из i-го контакта в j-й в случае, когда через i-й контакт пропускается ток, превышающий критическое значение $z_c = V/2\pi$. Мы будем рассматривать модель, в которой величины J_{ij} случайны, независимы и распределены с равной вероятностью в интервале $1 - dJ/2 < J_{ij} < 1 + dJ/2$, то есть $< J >= 1$. Так же, очевидно, что в нашем случае $J_{ij} = J_{ji}$.

Данные уравнения представляют собой модификацию модели Френкеля-Конторовой для случая большого затухания и случайного взаимодействия элементов, составляющих систему [4].

Параметр V является основным параметром модели и характеризует поведение системы. Так при $V \gg 1$ каждый элемент системы и вся система в целом обладают большим числом метастабильных энергетических состояний. Следствием этого факта для многоконтактного СКВИДа является свойство квантования магнитного потока и гистерезисное поведение [8]. В нашей работе мы будем рассматривать именно случай $V \gg 1$.

Ранее, изучая критическое состояние в дискретных сверхпроводниках, мы показали, что в случае наличия у системы большого числа метастабильных состояний ($V \gg 1$), в ней возможна реализация так называемого самоорганизованного критического состояния [9, 7]. Это явление состоит в следующем. Под воздействием малых внешних возмущений система приходит в критическое состояние. В цитируемых работах роль возмущения играла инжекция положительного и отрицательного токов в случайно выбранные контакты на границах системы так, что суммарный ток в системе равен нулю, что моделировало возмущение внешним магнитным полем. В возникающем критическом состоянии величины токов на контактах по модулю были близки к критическому, а средний ток в системе равен нулю. Далее очередное возмущение приводит к тому, что ток в каком-либо контакте по модулю превосходит критический и происходит "сброс" избыточного тока на соседние с ним контакты. В них токи в свою очередь также могут превысить критическое значение, и в системе возникает лавинообразное перераспределение токов между контактами. Остановка лавины может происходить за счет аннигиляции существующих в системе положительных и отрицательных токов [10]. В результате перераспределения токов между контактами система переходит из одного метастабильного критического состояния в другое, при этом локальные токи на контактах могут меняться. Величина тока, который уходит с данного контакта на каждый из соседних, определяется пространственной структурой СКВИДа, а следовательно, коэффициентами J_{ij}.

Таким образом, самоорганизованное критическое состояние представляет собой набор метастабильных состояний, по которым блуждает система в процессе своей эволюции, что сопровождается каскадами перераспределений токов, называющихся лавинами. Лавины обнаруживают себя как импульсы напряжения на контактах. Функция распределения размеров таких лавин в самоорганизованном критическом состоянии демонстрирует степенное поведение [7].

Самоорганизованное критическое состояние возникает в системе в случае, когда средний ток в ней ниже критического тока контактов, если же он превысит критическое значение, то в системе возникнет бесконечная лавина, поскольку в каждый момент времени в некотором количестве контактов ток будет превосходить критическое значение. В этом случае естественно было бы предположить, что система в процессе эволюции будет проходить через все имеющиеся у нее метастабильные состояния, демонстрируя хаотическое поведение. Однако реализуется совсем иной сценарий. Далее мы продемонстрируем, что вместо ожидаемого хаотического поведения в нашей системе будут реализовываться предельные циклы, и многоконтактный СКВИД в целом начинает работать как единый джозефсоновский контакт. Заметим, что этот эффект было бы крайне интересно наблюдать экспериментально.

Мы будем рассматривать нашу систему при условиях, используемых в экспериментах для СКВИДов постоянного тока. Начиная со стабильного состояния системы, в котором на всех узлах $\varphi_i = 0$, мы будем инжектировать в систему ток величиной F_i следующим образом. Выбрав случайно L из общего числа N контактов, положим для каждого из них $F_i = <z> \cdot N/L$, где $< z >= z_c + \Delta z_c$, $z_c = V/2\pi \approx 6.36$. Таким образом, мы инжектируем в систему суммарный ток $\sum_i F_i =< z > N$ и эта величина больше, чем Nz_c, то есть в систему инжектируется ток, больший суммарного критического тока контактов, и система находится в надкритическом режиме. При таком внешнем воздействии в системе, естественно, возникает динамический процесс, в течение которого происходит перераспределение токов по контактам, согласно уравнениям (1). Поскольку средний ток, приходящийся на отдельно взятый контакт $< z >$, больше критического значения, и ток не может покидать систему, то данный процесс перераспределения затухать не будет. Для характеристики динамических процессов в системе будем использовать величину среднего по всем контактам напряжения. Заметим, что именно эту величину можно наблюдать экспериментально, и определяется она следующим образом:

$$u(t) = \frac{\Phi_0}{2\pi N} \sum_i \frac{d\varphi_i}{dt}. \qquad (2)$$

Мы проводили моделирование динамики нашей системы на решетке размером $N = 25 \times 25$ узлов, используя для уравнений (1) схему Эйлера с шагом $dt = 0.01$, при этом мы брали $V = 40$, что означает $z_c = 40/2\pi$. Коэффициенты J_{ij} выбирались случайными с равной вероятностью в интервале $1 - dJ/2 < J_{ij} < 1 + dJ/2$, то есть $< J >= 1$, величина dJ для каждого случая будет оговариваться особо. Также для каждого случая будет определена величина $< z >= N^{-1} \sum_i F_i = z_c + \Delta z_c$.

На рис.2 представлена зависимость напряжения $u(t)$, вычисленного по формуле (2), от времени в те-

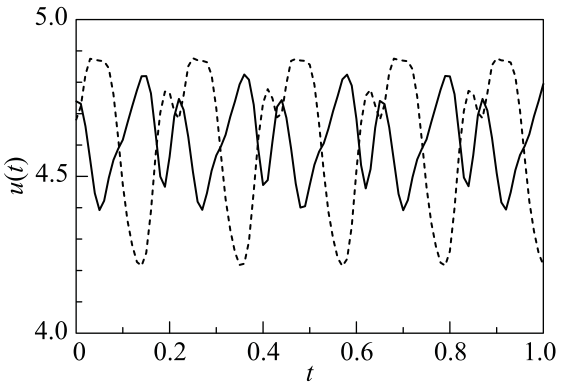

Рис.2. Зависимость величины напряжения $u(t)$ в системе от времени при двух различных начальных условиях для случая $dJ = 0.1$, $<z> = z_c + 1.5$. Из рисунка видно, что в системе возникает bulk-SQUID эффект и в зависимости от начальных условий реализуются различные предельные циклы

чение возникающей в системе бесконечной лавины при $< z >= z_c + 1.5$ и $dJ = 0.1$. Мы видим, что среднее напряжение демонстрирует строго периодическое поведение. Этот впечатляющий результат говорит о том, что в системе не возникает хаотического поведения, а множество джозефсоновских контактов, составляющих СКВИД, в надкритическом режиме работает как единый джозефсоновский контакт, начиная генерировать переменное напряжение, что и называется bulk-SQUID эффектом. Далее мы меняли начальные условия для уравнений (1), выбирая другие L контакты для первоначальной инжекции тока. В результате наблюдали, что при изменении начальных условий зависимость напряжения $u(t)$ от времени остается строго периодической. Однако средние по времени значения этой величины $U \equiv< u(t) >$ меняются от реализации к реализации.

Таким образом, мы наблюдали, что у динамической системы, описываемой уравнениями (1), в надкритическом режиме в качестве аттракторов имеется целый набор предельных циклов. В зависимости от начальных условий в качестве траектории у системы всегда реализуется один из них. В этом смысле система (1) является неэргодичной.

Данный факт очень наглядно иллюстрируется рис.3. На нем представлены корреляционные функ-

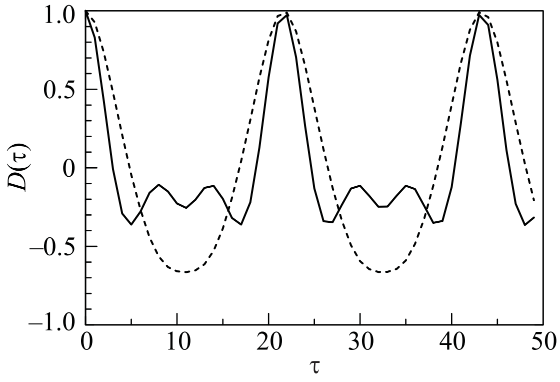

Рис.3. Корреляционная функция, рассчитанная по формуле (4) для напряжения $u(t)$ в случае двух различных начальных условий. Отчетливо виден периодический, ниспадающий, характер корреляций, что свидетельствует о неэргодичности исследуемой системы

ции для напряжения $u(t)$, которые рассчитывались по следующим формулам [11]:

$$\tilde{u}(t) = u(t) - U,$$
$$D_u(\tau) = < \tilde{u}(t)\tilde{u}(t+\tau) >; \tag{3}$$

угловые скобки здесь означают усреднение по времени. Из рисунка видно, что данные функции демонстрируют строго периодическое поведение на всем интервале вычислений, что явно свидетельствует о неэргодичности исследуемой системы [12]. Мы рассмотрели также зависимость среднего по реализациям напряжения $< U >$ от величины среднего тока $< z >$. Расчеты проводились следующим образом. Для фиксированного значения $< z >$ рассматривались реализации величины $u(t)$ для ста различных начальных условий, длина каждой из реализаций была $T = 10000$. Для каждой m-й реализации вычислялась средняя по времени величина $< u_m(t) > \equiv U_m$, а затем она усреднялась по всем $M = 100$ реализациям. Это означает:

$$U_m = \frac{1}{T}\int_{t=1}^{T} u_m(t)dt, \tag{4}$$
$$< U > = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} U_m.$$

Для каждого значения $< z >$ рассчитывалось еще среднеквадратичное отклонение величины U_m по следующей формуле [11]:

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(U_m - < U >)^2}. \tag{5}$$

На рис.4 представлены величина $< U >$ и среднеквадратичное отклонение σ_U в зависимости от вели-

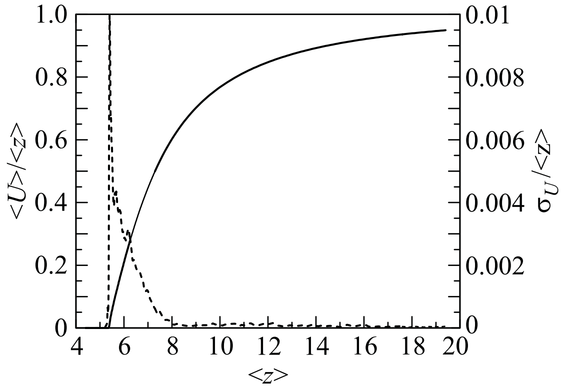

Рис.4. Зависимость величины среднего по реализациям напряжения $<U>$ и его среднеквадратичного отклонения σ_U от величины среднего тока $<z>$. $dJ = 0.1$. Зависимость $<U>$ при больших значениях $<z>$ хорошо аппроксимируется функцией $f(<U>) = 2.29(<U> - 5.4)^{0.8}$

чины $< z >$. Заметим, что в случае многоконтактного СКВИДа зависимость $< U > (< z >)$ представляет собой вольт-амперную характеристику системы. Из приведенной на рисунке зависимости видно, что в случае, когда средний ток в системе ниже эффективного критического тока системы $z_{cr} \approx 5.3$, система является сверхпроводящей и среднее напряжение в ней равно нулю. Значение $< z > = z_{cr}$ является точкой фазового перехода системы из сверхпроводящего в нормальное состояние. Важно заметить, что величина z_{cr}, меньше величины критического тока в контактах $z_c \approx 6.36$. По величине среднеквадратичного отклонения σ_U мы видим, что в области, близкой к величине z_{cr}, в системе присутствуют значительные критические флуктуации. Далее отклонение от среднего значения $< U >$ находится на уровне $10^{-3} - 10^{-4}$.

Таким образом, мы увидели, что возникновение bulk-SQUID эффекта в исследуемой системе и ее неэргодичность взаимосвязаны. Мы рассмотрели также эргодичный аналог нашей системы (1). Для того чтобы система стала эргодичной, мы изменили ее симметрию, а именно, было нарушено условие $J_{ij} =$

$= J_{ji}$. Действительно, при $J_{ij} \neq J_{ji}$ величина J, передаваемая при перераспределении с узла i на узел j в случае, когда на узле i происходит превышение критического значения z_c, не равна величине, передаваемой с узла j на узел i при превышении критического значения на узле j.

Покажем теперь, что условие $J_{ij} = J_{ji}$ отвечает за потенциальность системы. Мы можем представить уравнение (1) в виде

$$\tau \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\partial U(\varphi_i)}{\partial \varphi_i} = f_i(\varphi_i, ..., \varphi_N), \tag{6}$$

где потенциальная энергия системы выражается следующим образом:

$$U(\varphi_i) = \sum_i [V(1 - \cos\varphi_i) - 2\pi F_i \varphi_i] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}(\varphi_i - \varphi_j)^2. \tag{7}$$

В случае $J_{ij} = J_{ji}$ видно, что $\partial f_i/\partial\varphi_j = \partial f_j/\partial\varphi_i$, то есть система потенциальна. В случае же $J_{ij} \neq J_{ji}$ мы будем иметь дело с непотенциальной динамической системой, для которой, к сожалению, не можем пока привести физического аналога.

Заметим еще, что простого увеличения пространственной неупорядоченности в нашей системе путем изменения разброса dJ в величине коэффициентов J_{ij} недостаточно для восстановления эргодичности. Мы изучали нашу систему (1) при различных разбросах dJ, и при всех величинах dJ система оставалась неэргодичной.

Мы рассмотрели динамику полученной непотенциальной системы, используя тот же режим, что и ранее. То есть систему, находящуюся в стабильном состоянии при $\varphi_i = 0$, мы возмущали, полагая величину F_i в L случайно выбранных узлах $F_i = < z > N/L$. Далее мы, как и ранее, изучали поведение "напряжения" в системе, которое вычислялось по формуле (2). Рассматривались разные величины разброса dJ. На рис.5 представлена зависимость данной величины от времени для двух различных начальных условий. Мы наблюдали, что после относительно короткого переходного процесса, который и представляет по длительности время "забывания" начальных условий, траектории стремятся к одному и тому же среднему значению с незначительными флуктуациями. Кроме того, периодичность по времени, которая присутствовала в потенциальной системе, отсутствует.

Для подтверждения факта эргодичности непотенциальной системы мы рассмотрели также корреляционные функции исследуемого процесса. Результат

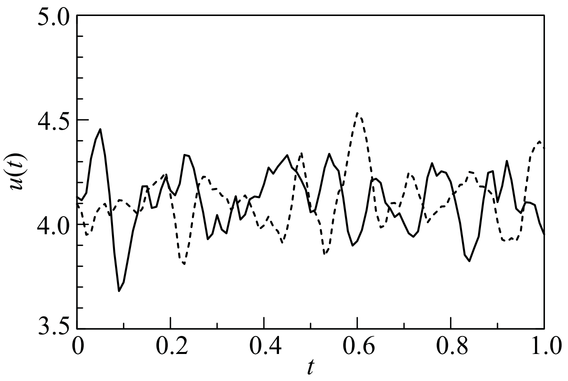

Рис.5. Зависимость величины $u(t)$ в непотенциальной системе от времени при двух различных начальных условиях и $< z >= z_c + 1.5$, $dJ = 0.1$

представлен на рис.6. Мы видим, что корреляционная функция достаточно быстро стремится к нулю, что говорит об эргодичности изучаемой системы.

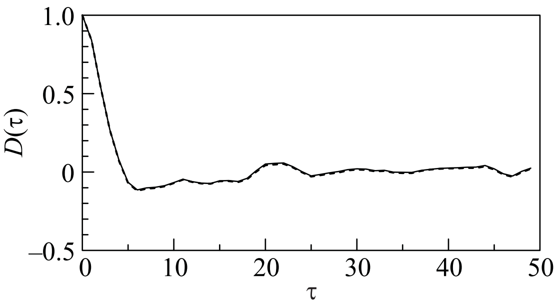

Рис.6. Корреляционная функция, рассчитанная по формуле (3) для $u(t)$ в непотенциальной системе. Функция довольно быстро затухает, что свидетельствует об эргодичности непотенциальной системы

Таким образом, можно сделать вывод, что в случае эргодичной системы bulk-SQUID эффект не наблюдается.

Так же как и для потенциальной системы, мы рассмотрели зависимость величины $< U >$, рассчитанной по формуле (5), и среднеквадратичного отклонения σ_U от величины $< z >$. Результаты представлены на рис.7. Из рисунка видно, что в случае непотенциальной системы величина среднеквадратичного отклонения значительно меньше, чем в потенциальном случае, и находится на уровне $10^{-4} - 10^{-5}$.

Подводя итоги, можно сказать следующее. В работе исследована система взаимосвязанных пороговых элементов, описываемая моделью Френкеля-Конторовой и находящаяся в надкритическом режиме. Одна из физических реализаций такой системы – дискретный сверхпроводник. В случае, когда исследуемая динамическая система потенциаль-

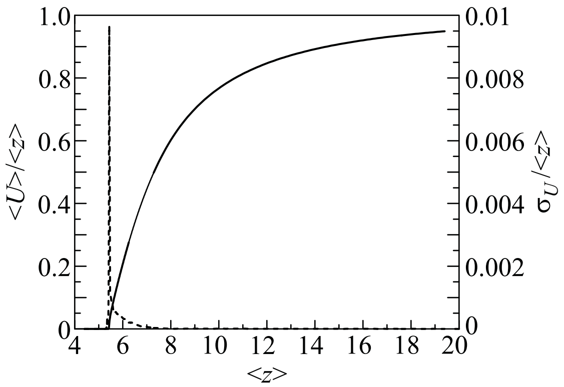

Рис.7. Зависимость величины $<U>$ и его средне-квадратичного отклонения σ_U от величины $<z>$, $dJ = 0.1$. Зависимость $<U>$ при больших значениях $<z>$ хорошо аппроксимируется функцией $f(<U>) = 2.32(<U> - 5.45)^{0.8}$

на, она является неэргодичной, и в ней реализуется bulk-SQUID эффект. Данное явление выражается в том, что система взаимосвязанных элементов откликается на внешнее воздействие так, как если бы представляла собой единый элемент. В частности, совокупность джозефсоновских контактов ведет себя как единый джозефсоновский контакт. В случае, когда система непотенциальна, она является эргодичной и bulk-SQUID эффект в ней не наблюдается. То есть bulk-SQUID эффект в системе является следствием ее неэргодичности. Понятие "неэргодичность" употребляется здесь в том смысле, что в качестве аттракторов у системы имеется большое число предельных циклов и, в зависимости от начальных условий, реализуется один из них. Заметим, что факт наличия у сложной, многомерной ($N = 625$) динамической системы множества предельных циклов в качестве аттракторов является весьма примечательным и ранее не наблюдался.

Теоретическое объяснение явлению bulk-SQUID дано в статье, и было бы весьма интересным пронаблюдать данный эффект экспериментально в случае пропускания через дискретный сверхпроводник надкритического тока. Также в перспективе было бы полезным исследовать поведение нашей динамической системы при помещении ее не на решетку, а на сложную сеть.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы "Квантовая макрофизика", Государственной программы "Сильно коррелированные электроны в полупроводниках, металлах, сверхпроводниках и магнитных материалах", Государственной программы "Нейтронная физика" и Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 08-02-00314-а).

1. В. М. Закосаренко, Е. В. Ильичев, В. А. Тулин, Письма в ЖЭТФ **48**, 140 (1988).
2. C. E. Gough, Physica C **153–155**, 1569 (1988).
3. Н. В. Заварицкий, В. Н. Заварицкий, С. В. Петров, Письма в ЖЭТФ **46**, 469 (1987).
4. О. М. Браун, Ю. С. Кившарь, *Модель Френкеля-Конторовой. Концепции, методы, приложения*, М.: Физматлит, 2008.
5. J. P. Sethna and C. R. Mayers, Phys. Rev. B **47**, 11171 (1993).
6. S. N. Coppersmith, Phys. Rev. A **36**, 3375 (1987).
7. S. L. Ginzburg, M. A. Pustovoit, and N. E. Savitskaya, Phys. Rev. E **57**, 1319 (1998).
8. К. К. Лихарев, *Ведение в динамику джозефсоновских переходов*, М.: Наука, 1985.
9. С. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **106**, 607 (1994).
10. S. L. Ginzburg and N. E. Savitskaya, JETP Lett. **69**, 133 (1999).
11. J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Random data: analysis and measurement procedures*, Wiley, New York, 1986.
12. С. М. Рытов,*Введение в статистическую радиофизику*, М.: Мир, 1976.