Письма в ЖЭТФ, том 92, вып. 9, с. 689 – 695

Перенос квантовых корреляций света на атомы

В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко

Лаборатория квантовой информации и вычислений, Государственного университета аэрокосмического приборостроения, 190000 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 12 августа 2010 г.

После переработки 5 октября 2010 г.

Рассмотрено взаимодействие двух широкополосных мод параметрического источника света с двумя атомами, расположенными в разных точках пространства. Как следует из найденных неравенств Белла для света и атомов, квантовые корреляции мод, которые связаны с нелокальностью состояния источника, полностью переносятся на атомы. Рассмотренная система может быть использована как квантовый канал, где информация кодируется неортогональными состояниями путем модуляции интенсивности волны накачки. Для такого канала рассчитана пропускная способность, которая определяется пределом Хелстрома.

1 Введение. Двухчастичные или двухсоставные физические системы могут иметь квантовые корреляции, которые проявляются как несепарабельность и нелокальность. Несепарабельность, для чистых состояний перепутанность, проявляется во многих квантовых информационных процессах, в число которых входит телепортация и плотное кодирование, квантовое распределение ключа, квантовое распределение секрета и пр. Несепарабельное состояние нельзя представить в виде суммы прямых произведений маргинальных матриц плотности [1], ее признаком для систем с непрерывными переменными служит критерий Дуана [2], а для систем с дискретными переменными – критерий Переса-Городецких [3, 4] или Вуттерса [5]. Нелокальность проявляется в нарушении неравенств Белла [6]. Известным примером служит синглетное состояние двух частиц с полуцелым спином, а также вернеровское состояние [3], где нелокальность зависит от доли синглетных состояний его образующих. Вернеровское состояние иллюстрирует соотношение между несепарабельностью и нелокальностью – в некоторой области параметров это состояние может быть несепарабельным и не нарушать неравенства Белла. Это означает, что несепарабельность является только необходимым условием для нелокальности, однако нелокальное состояние всегда будет несепарабельным.

Широкополосные моды с квантовой корреляцией, которые могут играть роль термостата, образуются в процессе параметрического взаимодействия [7], они получены экспериментально [8] и используются для реализации квантовых информационных процессов [9]. Цель работы – рассмотреть перенос нелокальности, которая определяется нарушением неравенств Белла для света и атомов. Для этого в работе выведено кинетическое уравнение для атомов, где релаксационный оператор имеет форму обобщенного оператора Линдблада. Важным моментом в этой постановке является согласованный выбор наблюдаемых для систем разной физической природы. В качестве наблюдаемой, описывающей нелокальные свойства состояния света и атомов, выбран оператор Белла [10], среднее от которого приводит к известным неравенствам вида Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта [11]. Из полученных неравенств Белла следует, что нелокальные свойства света полностью переносятся на атомы.

В рассмотренной системе свойства состояний света и атомов определяются параметром сжатия, который зависит от интенсивности классической волны накачки. С помощью этого классического параметра можно кодировать информацию состояниями квантовых систем и использовать нашу физическую модель как квантовый канал для передачи информации. Однако состояния канала оказываются неортогональными, что приводит к ошибке при передачи информации, которая определяется фундаментальным пределом Хелстрома [12]. Пропускная способность такого канала может быть связана с корреляционными свойствами состояний, она оказывается максимальной, если один бит классической информации кодируется парой из сепарабельного и нелокального состояний. Подобный канал может представлять интерес с точки зрения секретности, поскольку неортогональные состояния нельзя клонировать.

Статья построена следующим образом. Вначале для двухмодового источника параметрического света введена наблюдаемая Белла и рассмотрены неравенства Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта. Далее, используя уравнение, описывающее динамику атомов в заданном широкополосном двухкомпонентном поле, исследованы неравенства Белла для стационарного состояния атомов. Затем, на основе рассматриваемой физической модели, введен квантовый канал с неортогональными состояниями и рассчитана его пропускная способность.

2. Свойства света параметрического источника. Уже простая физическая модель параметрического источника света позволяет изучить проявление квантовых корреляций, характерные для неклассического состояния.

Рассмотрим параметрический источник света, генерирующий две моды одинаковой частоты, которые распространяются в разных направлениях. Для описания будем использовать простую модель на основе эффективного гамильтониана $V = i\hbar\chi(b_1^\dagger b_2^\dagger - \mathrm{h.c})$, где χ – константа связи, пропорциональная квадратичной восприимчивости нелинейной среды и интенсивности волны накачки, частота которой Ω, $b_m^\dagger, b_m$ – операторы рождения и уничтожения мод $m = 1,2$ с частотой $\omega : \omega + \omega = \Omega$. Предполагается, что выполнены условия фазового синхронизма, связывающие волновые векторы мод, а сами моды имеют конечную ширину $\delta\omega$, которая определяется полосой синхронизма.

При генерации из вакуума состояние мод на выходе источника определяется волновой функцией [13]

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\cosh(r)}\sum_{n=0}^{\infty}\tanh^n(r)|n\rangle\otimes|n\rangle, \tag{1}$$

где $r = \chi t$ – параметр сжатия, $|n\rangle$ – фоковское состояние. Статистические свойства света параметрического источника можно описать с помощью корреляционной матрицы мод

$$\langle b_m^i(t) b_n^j(t+\tau)\rangle = \mathcal{K}_{mn}^{i,j}\delta(\tau), \tag{2}$$

где верхние индексы $i, j = \dagger, -$ отвечают операторам рождения или уничтожения. Индекс у оператора уничтожения будем опускать, $m, n = 1, 2$. В правой части (2) временная дельта-функция является крупномасштабной, она имеет ширину, которая определяется обратной шириной полосы синхронизма $(\delta\omega)^{-1}$. Поскольку статистика света является гауссовой, для описания свойств света достаточно введенной матрицы квадратичной по операторам рождения и уничтожении мод. Для состояния (1) корреляционная матрица определяется следующими отличными от нуля элементами:

$$\begin{gathered}\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} = \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} = N, \quad \mathcal{K}_{11}^{-,\dagger} = \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} = N+1,\\ \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} = \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} = M, \quad \mathcal{K}_{12}^{-,-} = \mathcal{K}_{21}^{-,-} = M^*,\end{gathered} \tag{3}$$

где $N = \sinh^2(r)$ – среднее число фотонов в модах, а величина $M = \cosh(r)\sinh(r)\exp(-i\phi)$ описывает межмодовую оптическую когерентность, ϕ – фаза классической волны накачки.

Волновая функция (1) является примером перепутанного состояния непрерывных переменных, возникающего в физической модели. В общем случае, когда состояние не является чистым, вместо перепутанности говорят о несепарабельности. Согласно критерию для непрерывных переменных, несепарабельное состояние приводит к нарушению неравенства

$$\langle(\Delta Q)^2\rangle + \langle(\Delta P)^2\rangle \geq 1, \tag{4}$$

где $\langle(\Delta Z)^2\rangle = \langle Z^2\rangle - \langle Z^2\rangle$ – дисперсия операторов разностной координаты и суммарного импульса $Z = Q, P$, $Q = q_1 - q_2$, $P = p_1 + p_2$, операторы канонической координаты q_m и импульса p_m мод $m = 1, 2$ определены соотношениями $b_m = q_m + ip_m$. Для рассматриваемой модели параметрического источника

$$\langle(\Delta Q)^2\rangle = \langle(\Delta P)^2\rangle = \frac{1}{2}(2N + 1 - 2|M|\cos(\phi)).$$

Отсюда следует, что в условиях, когда фаза классической волны накачки $\phi = 0$ при $r \neq 0$ неравенство (4) нарушается, причем тем сильнее, чем большим значением обладает параметр сжатия r. Это означает, что состояние (1) является несепарабельным.

Наряду с несепарабельностью состояние квантовой системы может быть нелокальным. Нелокальность проявляется в нарушении неравенств Белла и отличается от несепарабельности. Как продемонстрировано в [3], несепарабельность состояния является необходимым условием нарушения неравенств Белла. Для рассматриваемого параметрического источника нелокальность на основе неравенств Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта [11] была исследована в работе [14], где для моды введен оператор квазиспина $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$:

$$\begin{gathered}s_z = \sum_{n=0}^{\infty}(|2n+1\rangle\langle 2n+1| - |2n\rangle\langle 2n|),\\ s_- = (s_+)^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty}(|2n\rangle\langle 2n+1|), s_x \pm is_y = 2s_\pm,\end{gathered} \tag{5}$$

построенный на основе фоковских состояний моды. Эти операторы обладают коммутационными соотношениями, характерными для систем с полуцелым спином, $[s_z, s_\pm] = \pm 2s_\pm, [s_+, s_-] = s_z$.

Наблюдение нарушения неравенств Белла сводится к следующей процедуре. Пусть измерение над первой модой производится первым наблюдателем, что будем обозначать верхним индексом 1. Само измерение сводится к проектированию, отвечающему скалярному произведению $\mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}^{(1)}) =$

$a_x s_x^{(1)} + a_y s_y^{(1)} + a_z s_z^{(1)}$, где вектор $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ является единичным вектором. Коммутационные соотношения и равенство $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}^{(1)})^2 = I$ определяют собственные значения эрмитовского оператора $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}^{(1)})$, равные ± 1. Вторая мода измеряется вторым наблюдателем, и аналогичный результат выражается как скалярное произведение соответствующего второй моде векторного оператора квазиспина на единичный вектор $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Такой выбор наблюдаемых отвечает введению оператора Белла [10]

$$\mathcal{B} = \mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \mathbf{s}^{(2)}(\mathbf{b}) + \mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \mathbf{s}^{(2)}(\mathbf{b}') + \\ + \mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a}') \otimes \mathbf{s}^{(2)}(\mathbf{b}) - \mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a}') \otimes \mathbf{s}^{(2)}(\mathbf{b}'), \tag{6}$$

для системы из двух мод электромагнитного поля. Статистическое усреднение оператора Белла по любым "классическим" распределениям, а также и в рамках теорий скрытых параметров, приводит к известному неравенству $|\langle\mathcal{B}\rangle| \leq 2$. Оно нарушается для состояний, которые называют нелокальными. Известным примером нелокального состояния является синглетное спиновое состояние типа пары Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР). Такое состояние приводит к самому большому значению величины $|\langle\mathcal{B}\rangle|_{\max} = 2\sqrt{2}$, которое отвечает верхней границе для любых состояний [15].

Зададим единичный вектор $\mathbf{a}$ на сфере посредством полярного θ_a и азимутального φ_a углов, $\mathbf{a} = (\sin\theta_a\cos\varphi_a, \sin\theta_a\sin\varphi_a, \cos\theta_a)$. Тогда, проводя усреднение оператора Белла по состоянию двух мод, определяемому согласно (1), найдем

$$\langle\mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \mathbf{s}^{(2)}(\mathbf{b})\rangle = \cos\theta_a\cos\theta_b + \mathrm{th}2r\sin\theta_a\sin\theta_b, \tag{7}$$

где значения всех азимутальных углов положены равными нулю. Выбирая теперь значения полярных углов $\theta_a = 0$, $\theta_{a'} = (\pi/2)$, $\theta_b = -\theta_{b'} = (\pi/4)$, найдем зависимость $|\langle\mathcal{B}\rangle|$ как функцию параметра сжатия r. Эта зависимость представлена на рис.1. Из рисунка 1 следует, что неравенства Белла нарушаются при $r > 0.22$ и далее, с ростом параметра сжатия неравенство нарушается сильнее, поскольку величина $|\langle\mathcal{B}\rangle|$ все больше отличается от 2. В области больших значений параметра сжатия $r \gg 1$, значение $|\langle\mathcal{B}\rangle|$ стремится к пределу, который, как было указано выше, определяется состоянием ЭПР пары.

Рассмотренная модель параметрического источника является простым примером, который иллюстрирует основные соотношения между такими квантовыми корреляциями как несепарабельность и нелокальность.

3. Перенос квантовых свойств света при взаимодействии с атомами. Рассмотрим, как

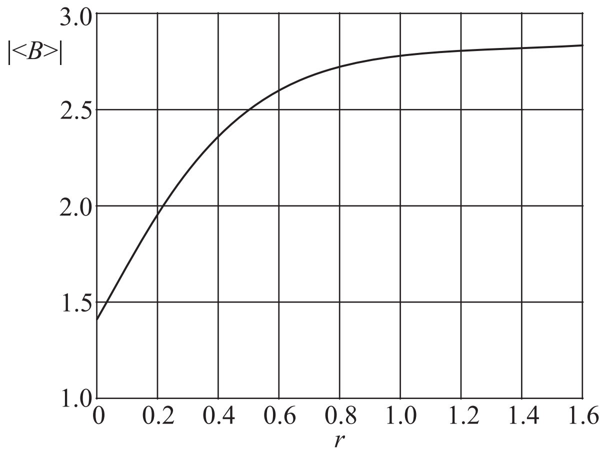

Рис.1. Модуль среднего значения оператора Белла в зависимости от параметра сжатия источника

квантовые корреляции мод паметрического источника могут быть перенесены на систему другой физической природы, в качестве которой будут выступать атомы.

Пусть моды параметрического источника взаимодействуют с двумя атомами, расположенными в разных точках пространства. Атомы будем считать двухуровневыми и описывать их с помощью повышающих, S_m^+, и понижающих, S_m^-, операторов с коммутационными соотношениями, отвечающими алгебре su(2), $[S_m^+, S_n^-] = S_z\delta_{mn}$; $m, n = 1, 2$, где S_z – оператор инверсии перехода. Моды будем считать широкополосными, полагая, что их ширина $\delta\omega$ много больше ширины атомных уровней. Тогда квазирезонансное взаимодействие атомов и света можно описать следующими стандартными гамильтонианами:

$$V_m = -i\hbar \int d\omega \eta_m(\omega)(b_m(\omega)S_m^+ - \mathrm{h.c.}), \tag{8}$$

где $b_m(\omega) = \int d\omega b_m(t)\exp(-i\omega t)$, $\eta_m(\omega)$ – константа связи.

Далее широкополосные моды будем рассматривать как термостат и запишем уравнение для атомов, используя технику стохастического интегрирования Ито в марковском приближении. Это означает, что константы связи следует считать не зависящими от частоты [16], полагая $\eta_m(\omega) = \sqrt{\gamma_m/2\pi}$. В марковском приближении поля источников считаются заданными и подчиненными только свободной эволюции. Тогда для матрицы плотности атомов можно получить следующее уравнение [17]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\sum_{m=1,2}\frac{\gamma_m}{2}\Big[N(S_m^-S_m^+\rho-2S_m^+\rho S_m^-+\rho S_m^-S_m^+)+$$
$$+(N+1)(S_m^+S_m^-\rho-2S_m^-\rho S_m^++\rho S_m^+S_m^-)\Big]-$$
$$-\sqrt{\gamma_1\gamma_2}[M(S_1^-S_2^-\rho-S_2^-\rho S_1^--S_1^-\rho S_2^-+\rho S_1^-S_2^-)+$$
$$+M^*(S_1^+S_2^+\rho-S_2^+\rho S_1^+-S_1^+\rho S_2^++\rho S_1^+S_2^+)]. \quad (9)$$

Это уравнение описывает совместную динамику атомов в перепутанном или несепарабельном термостате, который к тому же может быть и нелокальным. В (9) первые слагаемые, пропорциональные γ_m, описывают обычную релаксацию, остальные слагаемые описывают эффективное взаимодействие между атомами, которое возникает из-за квантовых корреляций термостата. Заметим, что для симметричного случая, когда $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$, вклад всех слагаемых в (9) имеет один порядок величины. Из этого уравнения следует, что эволюция каждого из атомов подчиняется своей собственной субдинамике, где наличие корреляций между атомами никак не проявляется.

Чтобы получить решение (9) введем базис, составленный из атомных состояний: $e=|1\rangle\otimes|1\rangle$, $g=|0\rangle\otimes|0\rangle$, $f=|1\rangle\otimes|0\rangle$, $e=|1\rangle\otimes|0\rangle$, где $|0\rangle$ – основное, а $|1\rangle$ – возбужденное состояния атома. Тогда, полагая, что все константы релаксации одинаковы $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$, а в начальный момент атомы находились в основном состоянии, найдем стационарную матрицу плотности при $t\to\infty$. В стационарном состоянии у каждого атома средняя инверсия на переходе определяется соотношением $\langle S_z\rangle=-(2N+1)^{-1}$, а поляризация отсутствует, $\langle S_m^+\rangle$ + c.c. $=0$. Отличные от нуля двухчастичные матричные элементы определяются выражениями $\rho_{ee}=N/(2N+1)$, $\rho_{gg}=(N+1)/(2N+1)$, $\rho_{eg}=\rho_{ge}=|M|/(2N+1)$. Полученное решение означает, что возникает чистое перепутанное состояние атомов, которое описывается следующей волновой функцией:

$$|\Upsilon(r)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\Big(\sqrt{N}|e\rangle+\sqrt{N+1}|g\rangle\Big). \quad (10)$$

Заметим, что такое же состояние атомов возникает при воздействии одномодового широкополосного сжатого света на два атома в свободном пространстве [18], а также при возбуждении таким светом внешнего резонатора, где находятся атомы, которые взаимодействуют с высокодобротной резонаторной модой в крыле линии поглощения [19]. Такое состояние атомов возникает в свободном пространстве, однако только при их коллективном взаимодействии, когда атомы расположены близко друг к другу так, что внешнее сжатое поле на таком расстоянии не изменяется. Как показано в [20], если атомы будут разнесены в пространстве, то такого состояния не возникает из-за разрушения межатомных квантовых корреляций. Напротив, в нашем случае стационарное перепутанное состояние (10) возникает благодаря межмодовым квантовым корреляциям термостата.

Поскольку двухатомное состояние (10) является чистым, мерой его перепутанности служит энтропия одного из атомов, $S(\rho_1)=-\mathrm{Sp}\Big(\rho_1\log\rho_1\Big)$, где ρ_1 – одноатомная матрица плотности. В данном случае энтропия атома определяется энтропией бинарной величины, принимающей два своих значения с вероятностями x и $1-x$:

$$S(\rho_1)=-x\log x-(1-x)\log(1-x).$$

Здесь величина x определяется параметром сжатия

$$x=\frac{\sinh^2(r)}{\sinh^2(r)+\cosh^2(r)} \quad (11)$$

и может принимать значения в интервале $[0,1/2]$. С физической точки зрения, x представляет собой вероятность присутствия состояния $|e\rangle$ в $|\Upsilon(r)\rangle$. Максимальная энтропия, равная единице, получается при $x=1/2$, что отвечает свету с параметром сжатия $r\gg1$. В этих условиях возникает максимально перепутанное состояние $|\Phi^+\rangle=(1/\sqrt{2})(|e\rangle+|g\rangle)$.

Является ли состояние (10) нелокальным? Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся неравенством Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта. Пусть первый атом находится у наблюдателя, что будем обозначать верхним индексом 1, а второй атом – у наблюдателя 2. Пусть каждый из наблюдателей производит измерение соответствующих им физических величин $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$, заданных единичными векторами. Квазиспиновыми операторами, определяющими оператор Белла, теперь являются операторы Паули $\sigma_x^{(m)}=S_m^++S_m^-$, $\sigma_y^{(m)}=(S_m^+-S_m^-)/i$, $\sigma_z^{(m)}=(S_m^+S_m^--S_m^-S_m^+)$ с коммутационным соотношениям $[\sigma_x^{(m)},\sigma_y^{(n)}]=(1/2i)\sigma_z^{(m)}\delta_{mn}$. В итоге оператор Белла имеет вид (6) с заменой $\mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a})\to\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{a})$, $\mathbf{s}^{(2)}(\mathbf{b})\to\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{b})$. Проводя усреднение этого оператора по состоянию (10), имеем средние вида

$$\langle\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{a})\otimes\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{b})\rangle=\cos\theta_a\cos\theta_b+\mathrm{th}2r\sin\theta_a\sin\theta_b, \quad (12)$$

где значения всех азимутальных углов положены равными нулю. Нетрудно видеть, что выражения (12) и (7) совпадают. Это означает, что у света и атомов среднее значение оператора Белла будет одинаковым, поэтому у них будут одинаковыми корреляционные свойства, которые описываются неравенствами Белла. В частности, в рассматриваемой системе мы имеем пример полного переноса нелокальности со света на атомы.

4. Квантовый канал с неортогональными состояниями. Наличие классического параметра, определяющего поведение квантовой системы, является привлекательным для передачи информации. Используя такой параметр, можно осуществить кодирование классической информации состояниями квантовой системы и построить квантовый канал для передачи данных. Примером такого квантового канала может служить рассматриваемая физическая система, где две широкополосные моды взаимодействуют с двумя атомами.

Независимо от того, используются ли для передачи информации состояния квантовой или классической системы, необходим кодер и декодер, чтобы преобразовать информацию в форму, удобную для передачи через канал и доступную для получателя. В данном случае кодирование можно осуществить с помощью параметра накачки, который определяет свойства перепутанного состояния, возникающего в параметрическом источнике света. Два значения параметра накачки r_0 и r_1 позволяют закодировать один бит с помощью двух перепутанных состояний $|\Psi(r_0)\rangle$, $|\Psi(r_1)\rangle$, определенных согласно (1). Однако эти состояния не являются ортогональными, что приводит к следующим особенностям.

Канал, где информация передается на неортогональных состояниях, невозможно прослушать, поскольку неортогональные состояния нельзя клонировать. Эта особенность лежит в основе известного в квантовой криптографии протокола BB92 [21] и связана с тем, что неортогональные состояния являются плохо различимыми при детектировании. Последнее означает, что при передаче информации на таких состояниях в канале будут возникать ошибки, их величина зависит от выбора процедуры измерения, но устранить их нельзя. Фундаментальный предел для вероятности ошибки в случае двух неортогональных состояний $|\varphi_0\rangle$, $|\varphi_1\rangle$ для оптимального измерения установлен Хелстромом [12]:

$$p_e = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\xi_0\xi_1|\langle\varphi_0|\varphi_1\rangle|^2}), \tag{13}$$

где ξ_0, ξ_1 – априорные вероятности. Оптимальное измерение Y, приводящее к (13), определено двумя ортогональными векторами $|y\rangle\langle y|, y = 0, 1$. С геометрической точки зрения, это выглядит как система координат, где два неортогональных вектора $|\varphi_0\rangle$, $|\varphi_1\rangle$ расположены симметрично, образуя равные углы с осями координат.

Для нашего случая важно, что вопрос, будет ли оптимальным базис Y, чтобы различить состояния мод электромагнитного поля, определенные согласно (1), далеко не ясен. Однако, используя результаты предыдущего раздела, можно построить кодер, который будет использовать описанное измерение Y и обеспечивать вероятность ошибки, определенной пределом Хелстрома (13).

Физическая модель кодера включает взаимодействие широкополосных мод с двумя атомами, которое приводит к перепутанным состояниям (10). Они зависят от параметра накачки r и сохраняют квантовые корреляции света. Вместо r далее воспользуемся величиной x, определенной согласно (11). Тогда можно рассмотреть два атомных состояния $\Upsilon(x_0)$ и $\Upsilon(x_1)$, выделенные параметрами накачки r_0, r_1, и использовать для измерения оптимальный базис Y, который будет приводить к (13). В итоге возникает следующий канал. Бинарный классический сигнал X со значениями x_0, x_1, которые случаются с вероятностями ξ_0, ξ_1, кодируется двумя состояниями света на выходе параметрического источника, которые преобразуются в два атомных состояния. Затем проводится измерение в оптимальном базисе Y:

$$X \to \rho_X = \xi_0|\Upsilon(x_0)\rangle\langle\Upsilon(x_0)| + \xi_1|\Upsilon(x_1)\rangle\langle\Upsilon(x_1)| \to Y.$$

Два исхода измерения в базисе Y позволяют получить на выходе этого канала один бит классической информации с ошибкой (13).

С точки зрения пользователя, интерес представляет не только оптимальная ошибка p_e, определяемая пределом Хелстрома, а также взаимная энтропия между входом и выходом $I(X:Y)$. Величина $I(X:Y)$ определяет соответствие между полученной и посланной информациями. Для рассматриваемого случая $I(X:Y)$ оказывается максимальной при измерении в оптимальном базисе Y и определяется через предел Хелстрома [22]:

$$I(X:Y) = 1 - h(p_e), \tag{14}$$

где $h(z) = -z\log z - (1-z)\log(1-z)$, а величина p_e при $\xi_0 = \xi_1 = 1/2$ имеет вид

$$p_e = \frac{1}{2}\Big[1 - \sqrt{1 - \Big(\sqrt{x_0x_1} + \sqrt{(1-x_0)(1-x_1)}\Big)^2}\Big].$$

Взаимная информация $I(X:Y) \in [0,1]$, определенная согласно (14), описывает классическую пропускную способность квантового канала, где ошибка возникает из-за неортогональности квантовых состояний, и показывает количество полученной информации в расчете на один посланный бит.

Отметим следующее важное обстоятельство. Следствием супераддитивности квантовой энтропии является возможность увеличения классической пропускной способности квантового канала за счет коллективных измерений в перепутанном базисе. В [23] приведен протокол сверхплотного кодирования, где два бита классической информации кодируются четырьмя перепутанными состояниями, а измерения проводятся в базисе Белла, что дает увеличение пропускной способности канала в два раза. В отличие от сверхплотного кодирования, в нашем случае через канал передается только два перепутанных состояния. Поэтому вопрос стоит о различении двух состояний. Это дает возможность использовать приведенные выше критерии, согласно которым максимум правдоподобия и максимум взаимной информации достигаются при измерении в ортонормированном базисе Y, расположенном симметрично относительно рассматриваемых состояний. Использование, например, базиса Белла в нашем случае нивелирует коллективный характер измерения. Это связано с тем, что два атомных состояния, $\Upsilon(x_0)$ и $\Upsilon(x_1)$, оказываются ортогональны двум базисным состояниям, и мы фактически имеем дело с индивидуальным измерением.

Зависимость взаимной информации $I(X:Y)$ от x_0 и x_1 представлена на рис.2. При $x_0 = x_1$ величина $I(X:Y) = 0$, поскольку для этого случая два атомных состояния $\Upsilon(x_0)$ и $\Upsilon(x_1)$ полностью неразличимы, и передавать с их помощью информацию невозможно. Напротив, при $x_0 = 0$ и $x_1 = 0.5$, что соответствует значениям параметров накачки $r_0 = 0$ и $r_1 \gg 1$ и, наоборот, при $x_0 = 0.5$ и $x_1 = 0$, атомные состояния оказываются максимально различимы. Поэтому ошибка при их регистрации будет наименьшей: $p_e \approx 0.1464$. При такой ошибке $I(X:Y) \approx 0.3991$. Это означает, что на 10 отправленных бит правильно будет получено почти 4 бита. С практической точки зрения, такая пропускная способность не представляет большого интереса. Однако следует заметить, что канал использует неортогональные состояния, которые нельзя клонировать, что делает его привлекательным с точки зрения секретности, за которую приходится платить пропускной способностью.

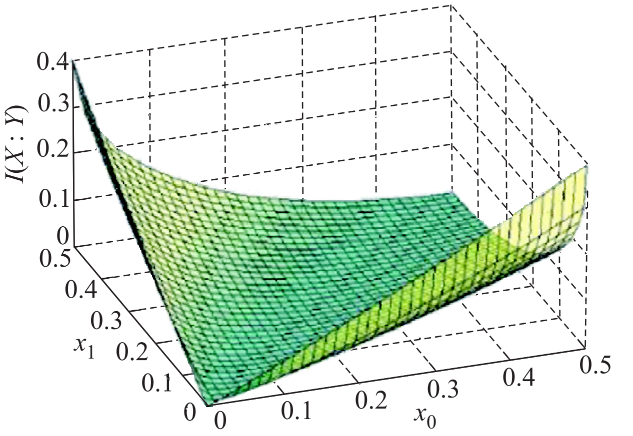

Рис.2. Зависимость взаимной энтропии от параметров x_0 и x_1

В данном случае для передачи информации используются перепутанные состояния, физические свойства которых определяются параметром накачки r или эквивалентной величиной x. Как было найдено, при значениях $r > 0.22$ (соответственно $x > \tau = 0.0448$) для атомных состояний (10) нарушаются неравенства Белла, и они становятся нелокальными. Для рассматриваемого канала, с точки зрения взаимной информации, основную роль играет различимость состояний, которая в данном случае может быть связана с их корреляционными свойствами. По корреляционным свойствам все пары состояний $\{x_0, x_1\}$ можно разделить на три типа: локальные $\mathcal{L}$, где $\{x_0, x_1\} \le \tau$, нелокальные $\mathcal{N}$, где $\{x_0, x_1\} > \tau$, и смешанные $\mathcal{M}$, где $x_0 \le \tau$, $x_1 > \tau$ или $x_0 > \tau$, $x_1 \le \tau$. Как следует из зависимости взаимной информации от величин x_0, x_1, максимальное значение, равное 0.3991 бит, достигается в области $\mathcal{M}$, где среднее значение составляет 0.1406 бита. Такое сочетание корреляционных свойств является наилучшим для рассматриваемого канала. Если взять пару состояний из $\mathcal{N}$ или $\mathcal{L}$, то средние значения взаимной информации для этих типов 0.0345 бита или 0.0088 бита, а максимальные значения 0.2029 или 0.0311 бит, соответственно.

Мы благодарим М.В.Чехову за полезные обсуждения.

1. R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
2. L.-M. Duan, G. Gedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2002); R. Simon, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2002).
3. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
4. M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
5. W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
6. J. H. Bell, Physics **1**, 195 (1964).
7. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, М.: Наука, 1980.
8. T. Iskhakov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. **102**, 183602 (2009).
9. N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. **94**, 220502 (2005); H. Yonezawa,

S. L. Braunstein, and A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. **98**, 110503 (2007).
10. S. L. Braunstein, A. Mann, and M. Revzen, Phys. Rev. Lett. **68**, 3259 (1992).
11. J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
12. C. W. Helstrom, *Mathematics in Science and Engineering*, Academic, New York, 1979, vol. **123**. C. W. Helstrom. Inf. Control. **10**, 254 (1967).
13. D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum optics*, Springer, 1994.
14. Z.-B. Chen, J.-W. Pan, G. Hou, and Y.-D. Zhang, Phys. Rev. Lett. **88**, 040406 (2002).
15. B. S. Cirelson, Lett. Math. Physics **4**, 93 (1980).
16. C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).
17. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **89**, 571 (2009).
18. G. M. Palma and P. L. Knight, Phys. Rev. A **39**, 1962 (1989); А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **75**, 151 (2002); **121**, 1249 (2002).
19. A. M. Basharov, V. N. Gorbachev, and A. A. Rodichkina, Phys. Rev. A **74**, 042313 (2006); А. М. Башаров, В. Н. Горбачев, Оптика и спектр. **102**, 641 (2007).
20. G. Kurizki and A.Ben-Reuven, Phys. Rev. A **36**, 90 (1987).
21. C.H. Bennett, Phys. Rev. Lett. **68**, 3121 (1992); C.H. Bennett, G. Brassard, and N. D. Mermin, Phys. Rev. Lett. **68**, 557 (1992).
22. А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, М.: МЦНИМО, 2002.
23. C.H. Bennett and S.J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).