Письма в ЖЭТФ, том 92, вып. 11, с. 813 – 816

Метод описания стационарного фронта реакции в двухмерном потоке

М. Л. Зайцев[1)], *В. Б. Аккерман*[1)]

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 115191 Москва, Россия

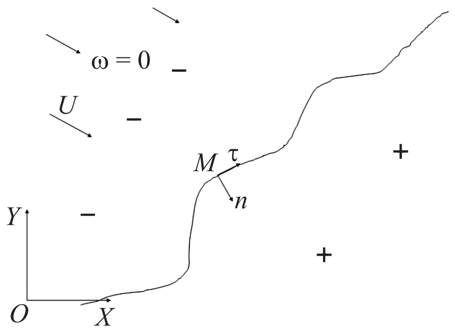
Поступила в редакцию 6 сентября 2010 г.

После переработки 19 октября 2010 г.

Показано, как полная система гидродинамических уравнений, описывающих положение стационарного фронта реакции в двухмерном несжимаемом натекающем потоке, может быть сведена к замкнутой системе поверхностных уравнений, с использованием метода снижения размерности в переопределенных системах дифференциальных уравнений. Эта система поверхностных уравнений позволяет определить положение самого стационарного фронта, а также все остальные величины, характеризующие гидродинамический поток через него.

1. Большой научный интерес представляет поиск единого уравнения, описывающего химическое равновесие и движение фронта реакции [1]. При этом особое внимание уделяется присущей фронту химической реакции (например, пламени) гидродинамической неустойчивости Дарье-Ландау (ДЛ-неустойчивости), вызванной тепловым расширением газа при экзотермическом процессе [1 – 9]. Действительно, газообразное топливо быстро натекает и сгорает в тонком слое газа, превращаясь, вследствие сильного энерговыделения, в газ с существенно большей температурой (и меньшей плотностью). В результате дополнительный объем газа, порожденный тепловым расширением, толкает топливо по нормали к каждой локальной точке поверхности фронта реакции, заставляя пламя двигаться самым причудливым образом. Благодаря ДЛ-неустойчивости, поверхность фронта реакции увеличивается, происходит увеличение потребления топлива, и в результате растет энерговыделение и, как следствие, скорость распространения фронта. Определение скоростей распространения искривленного фронта реакции, а также формы поверхности фронта является ключевым вопросом в различных физических и инженерных задачах. Во многих случаях происходит стабилизация поверхности пламени и рассматривается упрощенный случай стационарного фронта реакции. Такой стационарный фронт может быть стабилизирован теплопроводностью, звуковыми волнами и т.д. [6, 9]. Уравнение стационарного фронта горения сначала было получено в приближении слабо искривленного пламени и/или малого теплового расширения при горении [1, 7, 9]. В последнее время появились работы, где это ограничение снимается [10 – 12]. В данной работе мы предложим отличный от уже существующих метод нахождения классического стационарного ламинарного фронта реакции, не делая никаких существенных ограничений, а также укажем на его дальнейшее обобщение на более общие постановки задачи.

2. Не ограничивая общности, рассмотрим теперь в 2D случае распространение бесконечно тонкого стационарного слабо искривленного фронта пламени в потенциальном внешнем потоке, натекающем с постоянной скоростью $\mathbf{U}$, то есть $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \nabla\varphi$, $\Delta\varphi = 0$ (см. рисунок). Предположим, что газодинамика горения характеризуется пространственным масштабом R. Это может быть радиус трубы, ширина двумерного канала, радиус сферической камеры сгорания и т.д. Для удобства аналогично работе [13] введем безразмерные величины: скорость $\mathbf{u} = \mathbf{v}/U_f$, координаты $\mathbf{r} = \mathbf{x}/R$ и давление $P = (\Pi - \Pi_f)\rho_f U_f^2$, где ρ_f и Π_f – соответственно плотность и давление в топливе бесконечно далеко от фронта, а U_f – скорость пламени с плоским фронтом. Время t обезразмерим величиной R/U_f. Обозначим знаками "$-$" и "$+$" позиции перед и за фронтом. Поток газа предпо-



Стационарный фронт в 2D случае

[1)]e-mail: mlzaytsev@gmail.com, slava.akkerman@gmail.com лагается несжимаемым и невязким. Тогда гидродинамические уравнения примут вид

$$\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}+\nabla\left(\vartheta P+\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)=0, \tag{1}$$

$$\nabla\times[\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}]=0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0, \tag{3}$$

где ϑ – локальное тепловое расширение, причем $\vartheta=1$ в топливе и $\vartheta=\theta=\rho_-/\rho_+$ в сгоревшем газе. Граничные условия на поверхности фронта, следующие из законов сохранения, будут выглядеть следующим образом [2, 13]:

$$\mathbf{u}_+-\mathbf{u}_-=(\theta-1)\mathbf{n}, \tag{4}$$

$$P_+-P_-=1-\theta, \tag{5}$$

$$u_{n-}=1, \tag{6}$$

где $\theta=\rho_-/\rho_+$ – скачок плотности через фронт, $\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ – тангенциальный единичный вектор к поверхности фронта (см. рисунок). Скорости $u_{n-}=(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})+\partial\varphi/\partial n=1$ и $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\tau}}=(\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\tau}+\partial\varphi/\partial\boldsymbol{\tau}$ связаны между собой формулой Грина [14]:

$$\pi\varphi(\mathbf{r})=$$
$$=\int\limits_{-\infty}\left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s)}{\partial n_s}\ln|\mathbf{r}_s-\mathbf{r}|-\varphi(\mathbf{r}_s)\mathbf{n}_s\cdot\frac{\mathbf{r}_s-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s-\mathbf{r}|^2}\right]dl(\mathbf{r}_s). \tag{7}$$

Тогда из уравнений гидродинамики (1)–(3) и условий на фронте (4)–(6) следует, что для любой точки M на фронте имеем

$$u_{n^-}+\frac{1}{2}(u_\tau^2-u_{n-}^2)+P=0, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{\theta-1}{\theta}[\mathbf{n}\times\nabla P], \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – завихренность сразу за фронтом.

3. Рассмотрим в области сгоревшего газа (см. рисунок) стационарные уравнения Эйлера двумерной несжимаемой жидкости в виде [2]

$$u_x\frac{\partial\omega}{\partial x}+u_y\frac{\partial\omega}{\partial y}=0, \tag{10}$$

$$\omega=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0. \tag{12}$$

Из (10) следует

$$u_y=-\beta u_x, \tag{13}$$

где

$$\beta=\frac{\partial\omega/\partial x}{\partial\omega/\partial y}.$$

После подстановки (13) в (11), (12) получим:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\beta\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_x\frac{\partial\beta}{\partial x}+\omega=0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}-\beta\frac{\partial u_x}{\partial y}-u_x\frac{\partial\beta}{\partial y}=0. \tag{15}$$

Выражая из (14) и (15) $\partial u_x/\partial x$, $\partial u_x/\partial y$, находим

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+Au_x+B=0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+Cu_x+D=0, \tag{17}$$

где

$$A=\frac{\beta(\partial\beta/\partial y)+\partial\beta/\partial x}{1+\beta^2},\quad B=\frac{\omega}{1+\beta^2},$$

$$C=\frac{\beta(\partial\beta/\partial x)-\partial\beta/\partial y}{1+\beta^2},\quad D=\frac{\beta\omega}{1+\beta^2}.$$

Дифференцируя (16) и (17) по x и y соответственно, получаем

$$\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial A}{\partial x}-AC\right)u_x+\frac{\partial B}{\partial x}-AD=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial C}{\partial y}-AC\right)u_x+\frac{\partial D}{\partial y}-CB=0. \tag{19}$$

Отсюда следует:

$$u_x=\left[\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial D}{\partial y}+CB-AD\right]\Bigg/\left[\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial x}\right]. \tag{20}$$

Выражения (16), (17) для ω, если туда подставить (20), получены строго из (10)–(12). Но это не означает, что (16) и (17) есть следствия друг друга. Таким образом, мы имеем переопределенную систему уравнений (16), (17) для ω, где возможно сократить размерность на единицу [15]. В итоге мы можем свести систему уравнений (16), (17) на плоскости к системе на любой кривой.

Пусть $y=f(x)$ – уравнение стационарного фронта (см. рисунок). Тогда мы можем найти систему уравнений для самого двумерного стационарного фронта реакции. Действительно, выведем некоторую замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений строго вдоль фронта реакции, получающуюся из (16), (17). Выражения (16), (17) для ω, если туда подставить (20), можно записать в виде

$$H\left(\omega,\frac{\partial\omega}{\partial x},\frac{\partial\omega}{\partial y}\dots\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4},\frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}\right)=0, \tag{21}$$

$$G\left(\omega, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y} \dots \frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}, \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}\right) = 0. \qquad (22)$$

Перейдем в точке M в систему координат $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$ (см рисунок). Тогда (21), (22) запишутся в виде

$$H\left(\omega, \frac{\partial\omega}{\partial \tau}, \frac{\partial\omega}{\partial n} \dots \frac{\partial^4\omega}{\partial \tau^4}, \frac{\partial^4\omega}{\partial n^4}\right) = 0, \qquad (23)$$

$$G\left(\omega, \frac{\partial\omega}{\partial \tau}, \frac{\partial\omega}{\partial n} \dots \frac{\partial^4\omega}{\partial \tau^4}, \frac{\partial^4\omega}{\partial n^4}\right) = 0. \qquad (24)$$

Продифференцируем уравнения (23) и (24) в направлении $\mathbf{n}$ 3 раза. Получаем 8 независимых уравнений вида

$$\left[H\left(\omega, \frac{\partial\omega}{\partial \tau}, \frac{\partial\omega}{\partial n}, \dots \frac{\partial^4\omega}{\partial \tau^4}, \frac{\partial^4\omega}{\partial n^4}\right)\right]_n^{(s)} = 0, \qquad (25)$$

$$\left[G\left(\omega, \frac{\partial\omega}{\partial \tau}, \frac{\partial\omega}{\partial n}, \dots \frac{\partial^4\omega}{\partial \tau^4}, \frac{\partial^4\omega}{\partial n^4}\right)\right]_n^{(s)} = 0, \ s = 0\dots3. \qquad (26)$$

Обозначим

$$S_v = \partial^v\omega/\partial n^v, \qquad (27)$$

где $v = 0\dots7$, $S_0 = \omega$. Тогда 8 уравнений (25), (26) можно записать в виде

$$O_k\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial\tau}, \frac{\partial^2 S_v}{\partial\tau^2}\dots\right) = 0, \ v = 0\dots7, \ k = 1\dots8. \qquad (28)$$

Таким образом, зависимость от производной по $\mathbf{n}$ в преобразованной системе дифференциальных уравнений (28) будет отсутствовать, и мы получим замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений строго вдоль фронта реакции. Добавим к (28) уравнения (7)–(9), через которые выражается $y = f(x)$. В итоге мы будем иметь систему интегро-дифференциальных уравнений для самого стационарного фронта реакции и, помимо этого, определим, как меняются на разрыве все остальные параметры, характеризующие течение, такие как $\mathbf{u}$, P, ω и т.д. Выкладки показывают, что выражения (28) получаются чрезвычайно сложными, и в данной работе мы приводить их в аналитическом виде не будем.

Наш подход позволяет также учесть внешний вихревой поток, натекающий на стационарный фронт реакции. В этом случае мы можем записать выражения (28) по обе стороны на фронте в виде

$$O_{k-}\left(S_{v-}, \frac{\partial S_{v-}}{\partial\tau}, \frac{\partial^2 S_{v-}}{\partial\tau^2}\dots\right) = 0, \qquad (29)$$

$$O_{k+}\left(S_{v+}, \frac{\partial S_{v+}}{\partial\tau}, \frac{\partial^2 S_{v+}}{\partial\tau^2}\dots\right) = 0, \qquad (30)$$

где $v = 0\dots7$, $k = 1\dots8$, $S_{v\pm} = \partial^v\omega_\pm/\partial n^v$. Учитывая (4)–(6) и (27), также на передней и задней поверхности фронта формула (10) в системе координат $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$ (см рисунок) принимает вид

$$S_{1-} + u_\tau\frac{\partial S_{0-}}{\partial\tau} = 0, \qquad (31)$$

$$\theta S_{1+} + u_\tau\frac{\partial S_{0+}}{\partial\tau} = 0. \qquad (32)$$

Исключая из (31) и (32) u_τ, находим

$$S_{1-}\frac{\partial S_{0+}}{\partial\tau} - \theta S_{1+}\frac{\partial S_{0-}}{\partial\tau} = 0. \qquad (33)$$

Если мы запишем уравнения (29), (30) и (33) опять в прямоугольной системе координат OXY (см. рисунок), то получится замкнутая система из 17 уравнений (29), (30) и (33) от 17 неизвестных $S_{v\pm} = \partial^v\omega_\pm/\partial n^v$, $v = 0\dots7$ и $f(x)$, которая определяет, в частности, и саму форму стационарного фронта $y = f(x)$.

Данный метод может быть обобщен на более общие случаи гидродинамических разрывов. Например, в случае нестационарного фронта реакции, распространяющегося в потенциальном несжимаемом (даже вязком) двухмерном потоке для замыкания описывающих его поверхностных уравнений, необходимо одно независимое соотношение [1, 2, 13]. Произведя соответствующие выкладки, мы можем получить обобщение формул (16) и (17) для ω на нестационарный случай. Следовательно, сократив размерность на единицу, можно определить обобщение формул (28), которые и будут замыкать соответствующую систему гидродинамических уравнений фронта реакции.

В этом случае формулы (10) и (13) обобщаются соответственно до [2]

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u_x\frac{\partial\omega}{\partial x} + u_y\frac{\partial\omega}{\partial y} = \nu\Delta\omega, \qquad (34)$$

где ν – коэффициент вязкости, и

$$u_y = -\beta u_x - \alpha, \qquad (35)$$

где

$$\alpha = \frac{\partial\omega/\partial t - v\Delta\omega}{\partial\omega/\partial y}, \quad \beta = \frac{\partial\omega/\partial x}{\partial\omega/\partial y}.$$

Формулы (16), (17) и (20) остаются в силе, но с новыми параметрами

$$A = \frac{\beta\dfrac{\partial\beta}{\partial y} + \dfrac{\partial\beta}{\partial x}}{1+\beta^2}, \ B = \frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + \omega}{1+\beta^2},$$

$$C = \frac{\beta\dfrac{\partial\beta}{\partial x} - \dfrac{\partial\beta}{\partial y}}{1+\beta^2}, \ D = \frac{\beta\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + \beta\omega}{1+\beta^2}.$$

1. Я. Б. Зельдович, Я. Б. Баренблат, В. Б. Либрович и др., *Математическая теория горения и взрыва*, М.: Наука, 1980.

2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика: Гидродинамика*, т. VI, М.: Наука. 1986.
3. F. A. Williams, *Combustion Theory*, Benjamin, CA, 1985.
4. C. K. Law, *Combustion Physics*, Cambridge University press, NY, 2006.
5. G. I. Sivashinsky, Acta Astronaut. **4**, 1177 (1977).
6. P. Pelce and P. Clavin, J. Fluid Mech. **124**, 219 (1982).
7. V. V. Bychkov, S. M. Golberg, M. A. Liberman et al., Phys. Rev. E **54**, 3713 (1996).
8. S. Kadowaki, Phys. Fluids **11**, 3426 (1999).
9. V. V. Bychkov, Phys. Fluids **10**, 2091 (1998).
10. H. EL-Rabii, G. Joulin, and K. Kazakov, Phys. Rev. Lett. **100**, 174501 (2008)
11. G. Joulin, H. El-Rabii, and K. Kazakov, J. Fluid Mech. **608**, 217 (2008).
12. K. A. Kazakov, Phys. Rev. Lett. **94**, 094501 (2005).
13. V. Bychkov, M. Zaytsev, and V. Akkerman, Phys. Rev. E **68**, 026312 (2003).
14. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1966.
15. М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман, *Труды 52-й научной конференции МФТИ “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук”*, часть VI, Аэромеханика и летательная техника, М.: МФТИ, 2009, стр. 10.