Письма в ЖЭТФ, том 92, вып. 11, с. 842 – 846

Микроскопическая теория явления проскальзывания фазы в узкой диффузной сверхпроводящей полоске

А. В. Семенов, П. А. Крутицкий[+]*, И. А. Девятов*[∇1)]

Московский педагогический государственный университет, 119992 Москва, Россия

[+]*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Россия*

[∇]*Научно-исследовательский институт ядерной физики, МГУ, 119899 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 октября 2010 г.

После переработки 22 октября 2010 г.

Рассматривается теоретически явление проскальзывания фазы в узкой диффузной сверхпроводящей полоске в формализме уравнений Узаделя. Численно рассчитаны координатно-зависимые функции Грина, соответствующие седловой точке траектории в конфигурационном пространстве, и получена зависимость барьера свободной энергии от транспортного тока, приложенного магнитного поля и температуры.

Исследование явления проскальзывания фазы актуально для получения ответа на фундаментальный вопрос сверхпроводниковой наноэлектроники: до каких значений можно уменьшать сечение сверхпроводящей полоски, сохраняя ее способность переносить постоянный ток без диссипации. За последние несколько лет были получены новые теоретические результаты [1 – 4], существенно расширившие понимание явления проскальзывания фазы в узких сверхпроводящих полосках по сравнению с классической теорией [5, 6]. Эти новые результаты включают в себя вычисление вероятности, с которой происходит проскальзывание фазы при сверхнизкой температуре из-за явления квантового туннелирования [1], коррекцию выражения МакКамбера – Гальперина [6] для предэкспоненциального множителя в выражении для вероятности проскальзывания фазы вблизи критической температуры T_c [2], а также вычисления зависимости барьера свободной энергии для проскальзывания фазы от температуры и тока в чистой сверхпроводящей нанопроволоке при произвольной температуре [3]. Однако до настоящего времени не было проведено расчетов зависимости барьера свободной энергии от тока и магнитного поля для наиболее важного для практических применений случая диффузной нанопроволоки, находящейся при произвольной по сравнению с T_c температуре.

В настоящей работе мы рассматриваем теоретически проблему флуктуационного проскальзывания фазы в узкой (максимальный размер в сечении меньше длины когерентности при данной температуре) диффузной сверхпроводящей полоске постоянного сечения в формализме стационарных уравнений Узаделя [7], записанных в мацубаровской технике. Необходимо отметить, что состояние сверхпроводника в процессе проскальзывания фазы является существенно нестационарным, и для описания всего процесса проскальзывания фазы необходимо применение метода Ларкина и Овчинникова [8] или метода Элиашберга [9], в которых надо дополнительно учесть флуктуации. Однако исключением являются начальная и конечная точки процесса проскальзывания фазы, а также седловая точка траектории в конфигурационном пространстве, определяющая порог свободной энергии. Возможность применения стационарных уравнений для описания состояния системы в седловой точке обусловлена тем, что седловая точка, так же как и начальная и конечная точки, соответствует равновесию системы (являющемуся, однако, неустойчивым). Это обстоятельство является достаточно общим для процессов, связанных с флуктуационными переходами через большой барьер [10, 11]. В рассматриваемом нами случае флуктуации, переводящей одномерный сверхпроводник через барьер свободной энергии между двумя равновесными токовыми состояниями, стационарные уравнения Узаделя для состояния в седловой точке барьера формально можно получить, варьируя функционал свободной энергии по функциям Грина и учитывая равенство нулю первой вариации в седловой точке. Аналогичным образом обстоит дело в пределе высоких температур $T \lesssim T_c$, где для описания состояния в седловой точке оказываются применимы стационарные уравнения Гинзбурга – Ландау [5].

Для количественного описания исходного и конечного равновесных состояний и состояния “седловой

1)e-mail: igor-devyatov@yandex.ru

точки” мы использовали уравнение Узаделя [7], записанное в следующей калибровке (используется система единиц $\hbar = c = k_B = 1$):

$$G\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + i\bar{p_x}G\frac{\partial F}{\partial x} - \bar{p^2}GF + \frac{2\Delta G - 2\omega F}{D} = 0, \tag{1}$$

где G и F – нормальная и аномальная мацубаровские функции Грина, удовлетворяющие условию нормировки $G^2 + |F|^2 = 1$; p – сверхтекучий импульс вдали от места, где происходит проскальзывание фазы, p_x – компонента сверхтекучего импульса, параллельная полоске, Δ – комплексный параметр порядка, $\omega = (2n+1)\pi T$ – мацубаровская частота (T – температура), D – коэффициент диффузии. Калибровка в (1) выбрана так, чтобы вдали от места, где происходит проскальзывание фазы, функции Грина и параметр порядка не зависели от координат. Кроме того, учтено, что переменные по сечению полоски величины, какими при наличии внешнего магнитного поля являются сверхтекучий импульс и его квадрат, должны в силу оговоренной выше малости поперечных размеров входить в уравнение Узаделя усредненными по сечению (усреднение обозначено чертой над символами) [12].

Уравнение Узаделя (1) должно быть дополнено уравнением самосогласования для параметра порядка Δ и выражением для сверхтока J_s:

$$2\pi T\sum_{\omega>0}(\Delta/\omega - F) = \Delta\ln(T_c/T), \tag{2}$$

$$J_s = 2eN_0Ds\cdot 2\pi T\sum_{\omega>0}\left(\mathrm{Im}\left(F^*\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \bar{p_x}|F|^2\right), \tag{3}$$

где N_0 – плотность состояний на спин на уровне Ферми, s – площадь сечения полоски, $e = -|e|$ – заряд электрона.

Вероятность W флуктуационного перехода системы между двумя состояниями определяется барьером свободной энергии Гиббса δF между состояниями, $W \propto \exp(-\delta F/T)$. При этом порог свободной энергии δF равен разности энергий Гиббса системы в двух состояниях: состоянии, соответствующем седловой точке траектории процесса проскальзывания фазы в конфигурационном пространстве, и в однородном состоянии. Необходимая для вычисления порога свободной энергии формула, выражающая свободную энергию сверхпроводника через узаделевские функции Грина, получена из выражения для свободной энергии Эйленбергера [13] (мы используем обозначения работы [13]):

$$\Omega = N_0 s\int dx\left\{|\Delta|^2\ln\left(\frac{T}{T_c}\right) + 2\pi T\sum_{\omega>0}\left[\frac{|\Delta|^2}{\omega} - I\right]\right\}, \tag{4}$$

где

$$I = I_0 + I_1, \quad I_0 = \Delta^*F + \Delta F^* + 2\omega(G-1),$$

$$I_1 = -\frac{D}{2}\left\{\left(\mathrm{Re}(F^*\frac{\partial F}{\partial x})/(G|F|)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\mathrm{Im}(F^*\frac{\partial F}{\partial x})/|F|\right)^2 + \bar{p^2}|F|^2 + 2\bar{p_x}\,\mathrm{Im}\left(F^*\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right\}.$$

При наличии заданного тока J_s в энергии Гиббса появляется дополнительный член, описывающий взаимодействие системы с источником тока [4, 14]; соответствующий барьер уменьшается на величину работы, совершаемой источником тока над системой в процессе перехода системы из однородного состояния в состояние “седловой точки”, и становится равным

$$\delta F = \delta\Omega - \frac{1}{2e}J_s\delta\varphi, \tag{5}$$

где $\delta\varphi$ – соответствующая “седловой точке” разность фаз параметра порядка между $+\infty$ и $-\infty$.

Состояние, соответствующее седловой точке, описывается решением уравнения Узаделя (1) солитонного типа с граничными условиями $F(x \to \pm\infty) = F_{\pm\infty}$, где F_∞ удовлетворяет пространственно-однородному уравнению Узаделя:

$$-D\bar{p^2}G_\infty F_\infty - 2\omega F_\infty + 2\Delta_\infty G_\infty = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) совместно с уравнением самосогласования (2) позволяет определить $|F_\infty|$ и $|\Delta_\infty|$, но оставляет произвольной фазу. Поэтому разность фаз $\delta\varphi$ между областями однородной сверхпроводимости на $+\infty$ и $-\infty$, соответствующая данному значению $\bar{p_x}$ (то есть данному значению тока), вообще говоря, заранее неизвестна. Исключение составляет случай равных нулю тока и сверхтекучего импульса. Это отличие между случаями нулевого и ненулевого токов обусловило применение к ним несколько разных алгоритмов расчета функций Грина.

При $J_s = 0$ из симметрии процесса проскальзывания фазы относительно обращения времени следует, что максимум свободной энергии достигается в момент проскальзывания фазы, то есть аномальные функции Грина и параметр порядка в центре симметрии обращаются в нуль, а разность фаз $\delta\varphi$ между $+\infty$ и $-\infty$ составляет π [5]. Кроме того, из-за обращения в нуль $\bar{p}_x$ в уравнении Узаделя (1) выпадает содержащее мнимую единицу слагаемое, благодаря чему можно положить аномальные функции Грина и параметр порядка вещественными.

Численное решение уравнения Узаделя (1) с $\bar{p}_x = 0$ совместно с уравнением самосогласования (2) осуществлялось итерациями с использованием стандартной стратегии [15]. Входящие в (1) аномальные функции Грина представлены в виде суммы затравочных величин и отклонений от них, $F = F_0 + \delta F$, после чего уравнение Узаделя (1) было линеаризовано по δF. Линеаризованное уравнение Узаделя (1) решалось совместно с уравнением самосогласования (2). Для каждой мацубаровской частоты ω по методу Ньютона находилось решение линеаризованного уравнения Узаделя. По полученным аномальным функциям Грина F рассчитывался в соответствии с уравнением самосогласования (2) параметр порядка $\Delta(x)$. На следующем шаге находилось решение уравнения Узаделя (1) с вновь рассчитанным параметром порядка. Эта процедура повторялась до достижения сходимости.

Кроме численного решения, при больших значениях "параметра распаривания" $\Gamma = D\bar{p}^2/2$ [16] оказывается возможным аналитическое рассмотрение задачи. При достижении магнитным полем определенной критической величины (определяемой геометрией сечения и температурой) сверхпроводящая полоска испытывает фазовый переход второго рода в нормальное состояние. В окрестности этого поля система уравнений (1), (2) может быть сведена к замкнутому уравнению для параметра порядка, подобно тому как это имеет место в окрестности критической температуры, при этом аналогом температуры оказывается "параметр распаривания" Γ. Для этого следует разложить входящие в уравнение Узаделя (1) функции Грина в ряд по малому параметру Δ до членов третьего порядка, предполагая малость градиентов; разрешить (1) относительно функций Грина в соответствующих порядках; подставить найденные решения в уравнение самосогласования (2). При этом в первом порядке находится критическое значение "параметра распаривания", оказывающееся при нулевой температуре равным $\Gamma_{c0} = \Delta_0/2$, где Δ_0 – модуль параметра порядка при $T = 0$ (соответствующее критическое поле в случае полоски прямоугольного сечения шириной w: $H_{c0} = \frac{1}{|e|w}\sqrt{6\Gamma_{c0}/D}$); а в третьем порядке получается уравнение для Δ, вполне аналогичное одномерному уравнению Гинзбурга–Ландау:

$$\frac{D}{\Delta_0}\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2} - \frac{1}{3\Delta_0^2}\Delta^3 + \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_{c0}}\right)\Delta = 0. \qquad (7)$$

Коэффициенты в (7) приведены для случая $T \ll T_c$. Состояние, соответствующее седловой точке траектории процесса проскальзывания фазы в конфигурационном пространстве, описывается решением уравнения (7) солитонного типа, аналогичным соответствующему решению одномерного уравнения Гинзбурга–Ландау [5]:

$$\Delta(x) = \Delta_\infty(\Gamma)\tanh\left(\frac{x}{\xi(\Gamma)\sqrt{2}}\right), \qquad (8)$$

где введены обозначения $\Delta_\infty(\Gamma) = \sqrt{3}\Delta_0(1 - \Gamma/\Gamma_{c0})^{1/2}$, $\xi(\Gamma) = \sqrt{D/\Delta_0}(1 - \Gamma/\Gamma_{c0})^{-1/2}$.

Выражение для термодинамического потенциала Гиббса получается аналогичным предельным переходом в (4) и имеет вид

$$\Omega = N_0 s \int dx \left\{ \frac{D}{\Delta_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2 - \Delta^2\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_{c0}}\right) + \frac{\Delta^4}{6\Delta_0^2} \right\}. \qquad (9)$$

Подстановка в формулу (9) солитонного решения (8) дает для порога свободной энергии выражение, справедливое в области значений параметра распаривания Γ вблизи Γ_{c0}:

$$\delta F = 4\sqrt{2}N_0 s\Delta_0^{3/2}D^{1/2}\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_{c0}}\right)^{3/2}. \qquad (10)$$

На рис.1 представлены зависимости порога свободной энергии от "параметра распаривания" Γ, рассчитанные численно (сплошные линии), а также по формуле (10) (пунктир) и по следующей из теории Гинзбурга–Ландау формуле $\delta F = \frac{16\pi^{5/2}}{21\zeta(3)}N_0 s\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{3/2} D^{1/2}T_c^{3/2}\left[1 - \frac{\pi\Gamma}{4(T_c - T)}\right]^{1/2}$ (штрих-пунктир). Свободная энергия нормирована на характерный масштаб энергии конденсации $\delta F_{ns} = N_0 s\Delta_0^{3/2}D^{1/2}$. Видно, что рассчитанные численно зависимости $\delta F(\Gamma)$ довольно близки к линейным во всем диапазоне значений Γ, кроме непосредственной окрестности критического значения параметра распаривания при данной температуре Γ_c. Аналитики дают завышенные значения порога свободной энергии, причем, как и следовало ожидать, расхождение увеличивается с уменьшением температуры и магнитного поля. Вблизи Γ_c все кривые выходят на зависимость $\delta F \propto (1 - \Gamma/\Gamma_c)^{3/2}$.

Поскольку при не равном нулю токе нарушается симметрия процесса проскальзывания фазы во времени, фазы параметра порядка на $+\infty$ и $-\infty$, необходимые для задания граничных условий к уравнению Узаделя (1), больше не могут быть определены из соображений симметрии, и связь между разностью фаз

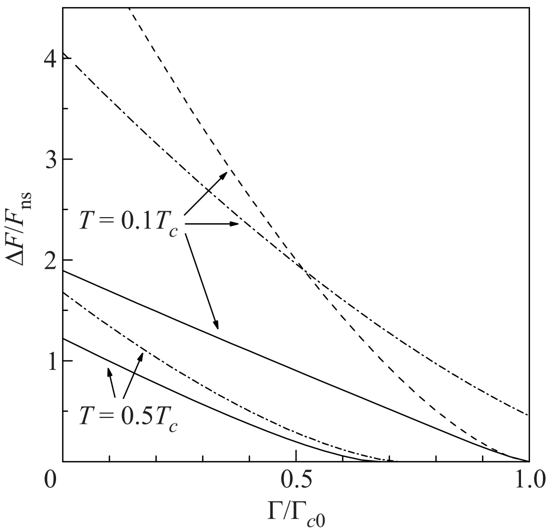

Рис.1. Зависимость порога свободной энергии от "параметра распаривания" $\delta F(\Gamma)$ при $J_s = 0$. Сплошные кривые – численный расчет, пунктир – формула (10), штрих-пунктир – теория Гинзбурга – Ландау. Свободная энергия нормирована на характерный масштаб энергии конденсации δF_{ns}, "параметр распаривания" нормирован на свое критическое значение при нулевой температуре Γ_{c0}

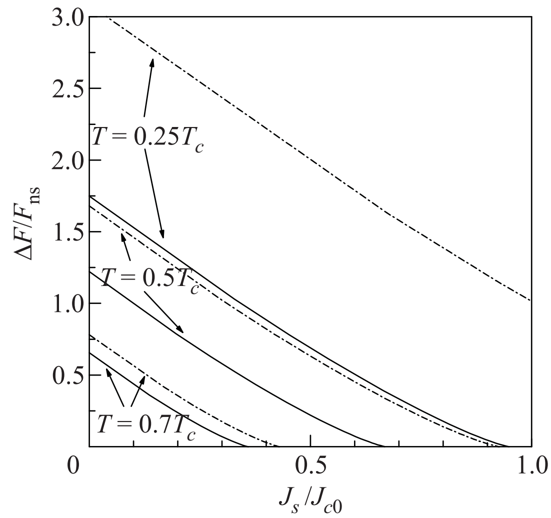

Рис.2. Зависимость порога свободной энергии от тока $\delta F(J_s)$ при $\Gamma = 0$. Сплошные кривые – численный расчет, штрих-пунктир – теория Гинзбурга – Ландау. Свободная энергия нормирована на характерный масштаб энергии конденсации δF_{ns}, а ток нормирован на критический ток в низкотемпературном пределе J_{c0}

$\delta\varphi$ и входящим в (1) параметром $\bar{p}_x$ заранее неизвестна. Поэтому расчет зависимости порога свободной энергии от тока потребовал модификации стандартной стратегии и включения в схему самосогласованного решения выражения для тока (3). В качестве фиксированного параметра использовалась разность фаз $\delta\varphi$, в то время как сверхтекучему импульсу $\bar{p}_x$ была предоставлена возможность меняться от итерации к итерации таким образом, чтобы по достижении сходимости удовлетворилось условие сохранения тока $J_s = \mathrm{const}(x)$. Для этого на каждой итерации после отыскания функций Грина и параметра порядка по формуле (3) рассчитывался ток в центре симметрии численного решения $J_s(0)$ [17]; а затем вновь по формуле (3), но с отброшенными градиентными членами, рассчитывался сверхтекучий импульс $\bar{p}_x$, обеспечивающий значение тока на бесконечности, равное $J_s(0)$. Новое значение $\bar{p}_x$ использовалось на следующей итерации при решении уравнения (1).

На рис.2 представлены зависимости порога свободной энергии от тока, рассчитанные численно и по полученной в рамках теории Гинзбурга – Ландау формуле работы [5]. Свободная энергия нормирована на характерный масштаб энергии конденсации δF_{ns}, ток нормирован на рассчитанный по формуле (3) критический ток в пределе $T \ll T_c$, который мы обозначили как J_{c0}. Близкая к линейной зависимость $\delta F(J_s)$, обусловленная линейным по J_s членом в (5), имеет место до значений токов $J_s \approx \frac{1}{2}J_c$ (J_c – критический ток при данной температуре). Как и в бестоковом случае, теория Гинзбурга – Ландау дает завышенные значения δF; при низкой температуре наблюдается расхождение более чем в два раза. Вблизи J_c для рассчитанных по микроскопической теории кривых даже в случае низких температур выполняется асимптотика $\delta F \propto (1 - J_s/J_c)^{5/4}$, получающаяся в рамках теории Гинзбурга – Ландау [5, 4].

Рассчитанные выше пороги свободной энергии определяют вероятности переходов между равновесными токовыми состояниями. Однако при наличии источника тока возможны также переходы в диссипативные состояния, реализующиеся как периодическая решетка центров проскальзывания фазы в двумерном пространстве-времени [18]. Существенно, что состояния такого типа могут становится устойчивыми уже при токах, меньших критического. Так, для случая сверхпроводников с большой концентрацией парамагнитных примесей соответствующий граничный ток равен $0.74J_c$ [19, 20]. Существование устойчивых диссипативных состояний накладывает ограничение на применимость наших результатов для расчета вольт-амперных характеристик или спектральной плотности флуктуаций в области токов вблизи J_c. Количественное определение граничного тока в рамках микроскопической теории требует решения уравнений Узаделя с пространственно-зависимым электрохимическим потенциалом и не равной нулю производной по времени, что выходит за рамки настоящей работы.

Таким образом, в рамках микроскопической теории нами рассмотрена задача о флуктуационном проскальзывании фазы в диффузном одномерном сверхпроводнике. С использованием разработанной нами методики численного расчета найдены решения, соответствующие седловой точке конфигурационой траектории процесса проскальзывания фазы. Рассчитанные зависимости порога свободной энергии от магнитного поля и тока во всем диапазоне температур оказались качественно сходными с получающимися в пределе высоких температур $1 - T/T_c \ll 1$ в рамках теории Гинзбурга – Ландау; количественное отличие составляет приблизительно два раза в пределе низких температур, малых токов и магнитных полей и уменьшается с ростом этих параметров. Наш результат контрастирует с результатом работы [3] для чистого одномерного случая, где токовая зависимость порога свободной энергии уже при $T = 0.7T_c$ получалась качественно отличной от предела высоких температур. Возможно, впрочем, что данное отличие обусловлено тем обстоятельством, что авторы [3] не учли линейного по току вклада в выражении для порога свободной энергии.

Авторы благодарны М.Ю. Куприянову за полезное обсуждение проблемы.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 09-02-01351-а.

1. D. S. Golubev and A. D. Zaikin, Phys. Rev. B **64**, 014504-1 (2001).
2. D. S. Golubev and A. D. Zaikin, Phys. Rev. B **78**, 144502-1 (2008).
3. A. Zharov, A. Lopatin, A. E. Koshelev et al., Phys. Rev. Lett. **98**, 197005-1, (2007).
4. Yu. N. Ovchinnikov and A. A. Varlamov, E-Print arxiv 0910.2659v1 [cond-mat.supr-con].
5. J. S. Langer and V. Amegaokar, Phys. Rev. **164**, 498 (1967).
6. D. E. McCumber and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **1**, 1054 (1970).
7. K. D. Usadel, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970).
8. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **73**, 299 (1977).
9. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **61**, 1254 (1971).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, часть 1, М.: Наука, 1976, § 162.
11. Я. И. Френкель, *Кинетическая теория жидкостей*, Л.: Наука, 1975, гл. 7, §§ 1, 2.
12. В отсутствие внешнего магнитного поля, очевидно, $\bar{p}_x = p$, $\bar{p}^2 = p^2$. В отсутствие тока, но при наличии магнитного поля $\bar{p}_x = 0$, а $\bar{p}^2$ определяется геометрией проводника и ориентацией поля. Например, в часто встречающемся случае, когда проводник представляет собой полоску шириной w и толщиной d, а поле ориентировано по нормали к его поверхности, $\bar{p}^2 = e^2 H^2 w^2/3$.
13. G. Eilenberger, Zeitschrift für Physik **214**, 195 (1968).
14. K. Yu. Arutyunov, D. S. Golubev, and A. D. Zaikin, Phys. Rep. **464**, 1 (2008).
15. W. Belzig, F. Wilhelm, C. Bruder et al., Superlattices Microstruct. **25**, 1251 (1999).
16. K. Maki, in *Superconductivity*, Ed. R. D. Parks, Marcel Dekker, New York, 1969, p. 1035.
17. До достижения сходимости рассчитанный по формуле (3) ток оказывался зависящим от координат из-за несогласованности затравочного значения $\bar{p}_x$ и $\delta\varphi$.
18. Б. И. Ивлев, Н. Б. Копнин, УФН **138**, 342 (1982).
19. L. Kramer, A. Baratoff, Phys. Rev. Lett. **38**, 518 (1977).
20. Б. И. Ивлев, Н. Б. Копнин, Письма в ЖЭТФ **28**, 649 (1978).