Письма в ЖЭТФ, том 93, вып. 5, с. 321 – 322

Квантовые вычисления с ансамблями идентичных фермионов и стационарным взаимодействием

Ю. И. Ожигов[1)]

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 декабря 2010 г.

Предлагается упрощенная схема квантовых вычислений на ансамблях идентичных фермионов с квадратичным замедлением по сравнению с абстрактной схемой квантового компьютера. Достоинство предлагаемой схемы состоит в туннельном управлении, тогда как взаимодействие кубитов предполагается диагональным и не требует контроля. Предлагаемую схему есть смысл использовать для реализации быстрых квантовых алгоритмов, например, алгоритма Шора.

1. Реалистические модели квантовых компьютеров. Мы рассматриваем фермионные вычисления в формализме чисел заполнения, предложенные в статье [1]. Покажем, что для выполнения произвольного квантового вычисления с допущением только незначительного замедления достаточно управлять только туннелированием. При этом взаимодействие между кубитами диагонального типа будет оставаться непрерывным и неуправляемым. Обоснование этого подхода дано с помощью редукции к стандартной модели квантовых вычислений в гильбертовом пространстве с использованием результатов статьи [2] об однокубитном управлении.

Работа [1] дает универсальные квантовые вычисления за довольно дорогую цену: требуется управлять не только внешним полем и туннелированием, но также и постоянным диагональным взаимодействием между кубитами, и еще и контактом со сверхпроводником, то есть управление коэффициентами α, β, γ в (1) и управление дополнительным слагаемым $\delta a_k^+ a_j^+ + \delta^* a_k a_j$. В настоящей работе мы увидим, как уменьшить эту цену, используя идею о непрерывном и неконтролируемом взаимодействии.

Рассмотрим ансамбль с гамильтонианом вида $H = \sum_i H^i_{\mathrm{ext.f.}} + \sum_{i,j}(H^{i,j}_{\mathrm{diag.}} + H^{i,j}_{\mathrm{tun.}})$, где гамильтонианы внешних полей, диагонального взаимодействия и туннелирования представляются в терминах операторов рождения и уничтожения как

$$\begin{aligned} &H^i_{\mathrm{ext.f.}} = \alpha_i a_i^+ a_i, && \alpha_i \in R, \\ &H^{i,j}_{\mathrm{diag.}} = \beta_{i,j} a_i^+ a_i a_j^+ a_j, && \beta_{i,j} \in R, \\ &H^{i,j}_{\mathrm{tun.}} = \gamma_{i,j} a_i^+ a_j + \gamma^*_{i,j} a_j^+ a_i. && \end{aligned} \tag{1}$$

Мы осуществим вычисление, только управляя амплитудой γ туннелирования и α внешнего поля. Для этого мы должны установить нестандартное соотношение между гильбертовым пространством кубитов и фоковским пространством чисел заполнения. Зафиксируем некоторое разбиение всех энергетических уровней на две равные части и выберем некоторое взаимно однозначное соответствие между этими частями. Для определенности мы можем рассматривать k-й уровень вниз от уровня Ферми ϵ_F и условиться, что он соответствует k-му уровню вверх от ϵ_F. Мы обозначим j-й уровень вниз от границы Ферми через обычную букву, а j-й уровень вверх от этой границы через букву со штрихом, j'. Назовем первый уровень j-м нижним уровнем, а второй – j-м верхним уровнем. Фоковское пространство $\mathcal{F}$ можно представить как $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \bigotimes \mathcal{F}_2 \bigotimes \ldots \bigotimes \mathcal{F}_k$, где каждый $\mathcal{F}_j$ соответствует j-й паре соответствующих энергетических уровней. Рассмотрим подпространство F_j в $\mathcal{F}_j$, которое порождено двумя следующими векторами. Первый будет таким: "j'-й уровень занят, а j-й свободен", второй же будет таким: "j-й уровень занят, а j'-й свободен". Обозначаем их через $|1\rangle_j$ и $|0\rangle_j$, соответственно. Мы будем работать с подпространством $F = F_1 \bigotimes F_2 \bigotimes \ldots \bigotimes F_k$ в фоковском пространстве $\mathcal{F}$. Определим функцию θ, которая отображает наше гильбертово пространство $\mathcal{H}$ в F с помощью следующего определения действия на базисных состояниях: $\theta(|\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n\rangle) = |\xi_1\rangle_1 \bigotimes |\xi_2\rangle_2 \bigotimes \ldots \bigotimes |\xi_n\rangle_n$ где все ξ_j есть нули и единицы. Тогда θ устанавливает нестандартное соответствие между гильбертовым и фоковским пространствами (см. рис.1).

Однокубитное состояние в гильбертовом пространстве соответствует двухкубитному состоянию в обычном отождествлении с кубитами (один уровень – один кубит). Мы увидим, что такое отождествление лучше соответствует нашим целям, чем естественное. Итак, теперь все готово для представления унитарных преобразований в гильбертовом

[1)]e-mail: ozhigov@cs.msu.su

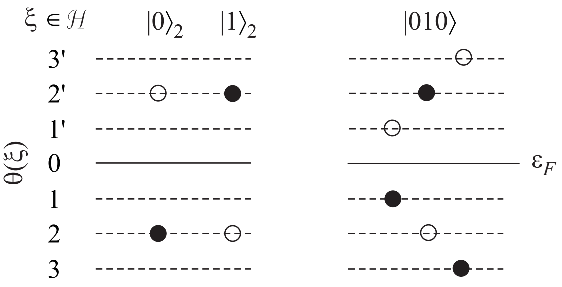

Рис.1. Соответствие между фоковским и гильбертовым пространствами

пространстве в терминах операторов, действующих в пространстве чисел заполнения. Рассмотрим эрмитов оператор H в двумерном гильбертовом пространстве состояний одного кубита $\mathcal{H}$. Он имеет вид H_0+H_1, где

$$H_0=\left(\begin{array}{cc} d_1 & 0\\ 0 & d_2\end{array}\right), H_1=\left(\begin{array}{cc} 0 & d\\ \bar d & 0\end{array}\right).$$

Непосредственно проверяется, что для операторов $\tilde H_0=d_1a_k^+a_k+d_2a_{k'}^+a_{k'}$ и $\tilde H_1=da_k^+a_{k'}+\bar d a_{k'}^+a_k$ (внешнего поля и туннелирования) выполняются равенства $\tilde H_i\theta=\theta H_i$ для $i=0,1$. Используя линейность θ, мы находим $(\tilde H_0+\tilde H_1)\theta=\theta H$. Однокубитное унитарное преобразование U в гильбертовом пространстве имеет форму e^{-iH} для гамильтониана H. В силу линейности θ и равенства $\theta^{-1}H^s\theta=(\theta^{-1}H\theta)^s$ для натуральных s мы находим, что для всякого однокубитного унитарного оператора U можно эффективно найти соответствующий гамильтониан в фоковском пространстве, содержащий только внешнее поле и туннелирование, который делает диаграмму из рис.2a замкнутой.

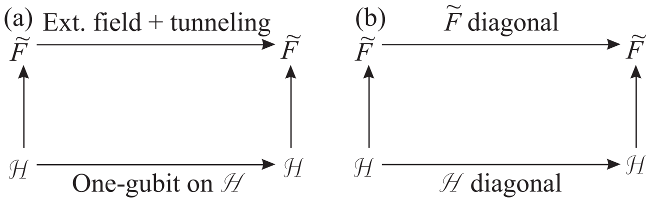

Рис.2. Соответствие операторов в фоковском и гильбертовом подпространствах. $\tilde F=F_j\bigotimes F_k$

Поскольку все диагональные матрицы коммутируют, для всех диагональных преобразований в пространстве $\mathcal{F}_k\bigotimes\mathcal{F}_j$ мы можем эффективно найти соответствующий диагональный оператор в гильбертовом пространстве, который делает диаграмму из рис.2b замкнутой. Комбинация диаграмм из рис.2 даст диаграмму из рис.3.

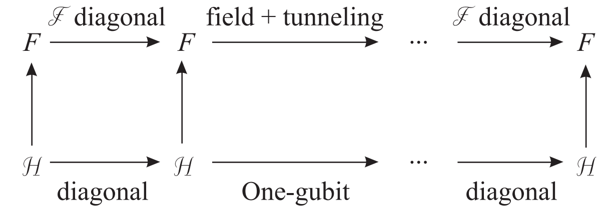

Рис.3. Соответствие вычислений в фоковском и гильбертовом пространствах

В силу результата работы [2] мы можем "поднять" вычисления в гильбертовом пространстве до вычисления в фоковском пространстве, делая замкнутыми выписанные диаграммы. Туннельный оператор $a_j^+a_{j'}$ в пространстве F приносит множитель $(-1)^{\sigma'}$, где $\sigma'=\sum\limits_{s+j}^{j'-1}n_s=j'-j$, который не зависит от данного состояния $|\bar n\rangle\in F$, поскольку для такого состояния ровно половина уровней между j и j' заняты фермионами. Таким образом, знак может быть вынесен из всех состояний и проигнорирован. Из-за того, что схема однокубитного управления из работы [2] вызывает квадратичное замедление вычислений по сравнению с абстрактной моделью квантового компьютера, данную схему туннельного управления целесообразно применять только для очень быстрых квантовых алгоритмов типа шоровского; для алгоритма Гровера, как для общего случая переборных задач (см. [3]), вся его выгода будет нейтрализована этим замедлением.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований грант # 09-01-00347-а.

1. S. B. Bravyi and A. Yu. Kitaev, Ann. Phys. **298**, 210 (2002).
2. Y. Ozhigov and L. Fedichkin, JETP Lett. **77**, 328 (2003).
3. Y. Ozhigov, Proc. Roy. Soc. Lond. A **455**, 2165 (1999)