Письма в ЖЭТФ, том 93, вып. 7, с. 431 – 436 © 2011 г. 10 апреля

Бризеры в одномерной ролловой структуре закрученных нематиков

О. А. Скалдин[*+1)], *В. А. Делев*[*], *Е. С. Шиховцева*[*], *Э. С. Батыршин*[*], *Ю. А. Лебедев*[*]

[*] *Учреждение Российской академии наук Институт физики молекул и кристаллов Уфимского научного центра РАН 450075 Уфа, Россия*

[+] *Уфимский государственный авиационно-технический университет, 450000 Уфа, Россия*

Поступила в редакцию 4 февраля 2011 г.

После переработки 21 февраля 2011 г.

Экспериментально и теоретически изучена динамика несингулярных дефектов в периодических структурах роллов, возникающих при электроконвекции в закрученных на $\pi/2$ нематических жидких кристаллах. Для ролловых структур в закрученных нематиках характерным является наличие аксиальной компоненты скорости гидродинамического потока с противоположным направлением в соседних роллах. На основе нелинейного уравнения движения для смещения роллов в работе получены количественные оценки критической частоты осцилляций структурных дефектов. Обнаружено, что в процессе осцилляций дефекта с несингулярным ядром происходит периодическое рождение и аннигиляция пары краевых дислокаций с топологическими индексами $+1$ и -1. Показывается, что осциллирующие дефекты с нулевыми топологическими индексами соответствуют решению уравнения sin-Гордона в виде стоячих бризеров.

Образование пространственно-временного порядка при ориентационно-фазовых превращениях в жидких кристаллах (ЖК), как правило, сопровождается процессами генерации самых разнообразных структурных неоднородностей и дефектов: дислокаций и дисклинаций с различными характеристиками, доменных стенок и солитонов [1–6]. Причем роль этих дефектов в проявлении физических эффектов, наблюдаемых в ЖК, весьма значима. Они, например, существенным образом влияют на сценарии образования и турбулизации доменных структур при электроконвекции в нематических ЖК (НЖК) [7–9]. С одной стороны, с увеличением надкритичности идеальная ролловая структура (домены Вильямса-Капустина) теряет свою когерентность, что приводит к появлению дефектов, и, как следствие, к возникновению режима слабой турбулентности (флуктуирующие домены Вильямса- Капустина или режим “weak turbulence”). С другой стороны, они являются важнейшим фактором при выборе системой характеристических пространственных мод (волновых векторов) при формировании 1D и 2D доменных структур. Поэтому для понимания механизмов образования и разрушения надмолекулярного порядка в неравновесных средах изучение природы генерации дефектов, их динамики и взаимодействия является особенно актуальной задачей.

Экспериментальное исследование данной проблемы в ЖК слоях с гомогенной ориентацией молекул представлено в работах [10–13], где классифицированы структурные дефекты, возникающие выше порога образования доменов Вильямса-Капустина, подробно изучены их динамика и статистические характеристики.

Однако теоретическое описание механизмов образования, динамики и взаимодействия дефектов на базе исходных электрогидродинамических (ЭГД) уравнений является весьма сложной задачей ввиду ее трехмерности и нелинейности. Даже определение пороговых характеристик (критического напряжения и волнового вектора) доменов Вильямса-Капустина из линейного анализа устойчивости системы исходных ЭГД уравнений требует численных расчетов [7, 8, 14]. Одним из подходов для описания механизмов образования, динамики и взаимодействия дефектов при электроконвекции в планарных НЖК является использование полуэмпирического метода, когда амплитудное уравнение Гинзбурга-Ландау получено из исходных ЭГД уравнений [8, 15–18], а его коэффициенты определяются экспериментально [13].

Что касается изучения дефектов при электроконвекции в НЖК с неоднородным распределением поля директора $\hat{\mathbf{n}}$ (гомеопланарная, закрученная ориентация), то подобные работы носят эпизодический характер [19–23]. В частности, в гомеопланарной ЭГД конвекции выше порога обнаружены два типа движущихся доменных стенок [19]. В закрученных на

[1)] e-mail: scala@anrb.ru

$\pi/2$ НЖК выше порогового напряжения в одномерной ролловой структуре наблюдаются два основных типа дефектов: с сингулярными и несингулярными ядрами [20–23]. Структурные особенности наблюдаемых типов дефектов в закрученных НЖК наряду с конвективной (тангенциальной) компонентой скорости гидродинамического потока $\mathbf{v}_\tau$ определяются наличием аксиальной компоненты $\mathbf{v_a}$, направление которой противоположно в соседних роллах [24]. Особый интерес здесь представляют дефекты с несингулярным ядром, которые не наблюдаются в НЖК с однородным распределением поля директора $\hat{\mathbf{n}}$.

В связи с этим целью данной работы является попытка количественного описания динамики дефекта с несингулярным ядром в периодической структуре роллов в закрученных на $\pi/2$ НЖК. Вначале экспериментально исследуется поведение дефекта с несингулярным ядром во времени. А затем, на основе полученных данных, предлагается модель для описания динамики такого рода дефектов, наблюдаемых при определенной начальной геометрии поля директора $\hat{\mathbf{n}}$ НЖК и его конкретных физических характеристик.

В качестве НЖК использовался 4-n-метоксибензилиден-n-бутиланилин (МББА), который помещался в ЖК ячейку между двумя стеклянными подложками с проводящим покрытием из SnO_2. Подложки натирались в одном направлении для создания планарной однородной ориентации директора $\hat{\mathbf{n}}$, затем они поворачивались друг относительно друга на угол $\pi/2$ так, что возникала закрученная на $\pi/2$ конфигурация поля директора $\hat{\mathbf{n}}$. Толщина ЖК ячейки размером $16 \times 12\,мм^2$ задавалась майларовыми прокладками $h = 20\,мкм$. К ЖК слою прикладывалось переменное напряжение U с частотой $f = 30\,Гц$. Пороговое напряжение возникновения доменов Вильямса-Капустина $U_c = 5.6\,В$. Измерения скоростей и направлений гидродинамических потоков в роллах проводились путем анализа движений пробных частиц диаметром $2 \div 3\,мкм$, добавленных в НЖК. Доменные структуры и их дефекты наблюдались в поляризационный микроскоп Axiolab (Zeiss, Germany), а их изображения регистрировались видеокамерой VX44 (PCO Inc., Germany) с разрешением 720×576 пикселей и оцифровывались внешней платой Pinnacle 700-USB (USA).

Как отмечалось выше, в закрученном на $\pi/2$ НЖК выше порога электроконвекции U_c в одномерной ролловой структуре наблюдаются дефекты с сингулярными (дислокации) и несингулярными ядрами [22]. Известно, что сингулярность дефектов определяется лишней (или недостающей) парой роллов при взятии контурного интеграла вокруг дефекта. Его величина отлична от нуля (равна 2π), что соответствует топологическому индексу ±1. При обходе дефекта с несингулярным ядром контурный интеграл равен 0, так как количество роллов выше и ниже ядра одинаковое, что и соответствует топологическому индексу 0.

Ядро стационарного несингулярного дефекта представляет собой границу (или доменную стенку), сквозь которую нет гидродинамического потока. В этом случае непрерывность потока обеспечивается замыканием соседних роллов по одну сторону доменной стенки, так что направление потока вблизи ее границы меняется на противоположное. Стационарный дефект по структуре потоков в роллах вблизи ядра аналогичен состоянию, изображенному на рис. 1b. При этом роллы выше ядра дефекта смещены относительно роллов ниже ядра дефекта примерно на половину пространственного периода λ. Минимальный размер такого дефекта L равен размеру элементарной ячейки d структуры роллов $L_{\min} = d = 2\lambda$, где λ – поперечный размер ролла. Элементарные дефекты с несингулярными ядрами могут образовываться по трем сценариям: (i) спонтанно; (ii) в результате взаимодействия двух дислокаций с индексами $+1$ и -1, движущихся вдоль оси роллов; (iii) в результате их отщепления от дислокаций.

Вблизи порога ($U \gtrsim U_c$) экспериментально наблюдаются стационарные дефекты с несингулярными ядрами произвольного дискретного размера: d, $2d$, $3d$, $4d$ и т.д. С увеличением приложенного напряжения U аксиальная компонента скорости потока $\mathbf{v_a}$ в роллах возрастает [24], и при некотором $U > U_c$ дефект начинает осциллировать.

Рассмотрим временную динамику дефекта размером $L = 4d$ с нулевым топологическим индексом за один период T осцилляций (рис. 1).

По сути, такие осцилляции представляют собой периодические замыкания (рис. 1a, c) и размыкания (рис. 1b, d) сонаправленных аксиальных компонент скорости $\mathbf{v}_a$ гидродинамического потока в роллах по разные стороны ядра дефекта.

Как видно из рис. 1a, при замыкании потоков нематической жидкости сквозь границу рождаются две краевые дислокации с топологическими индексами $+1$ и -1, их сумма дает 0 ($t = 0$). Через $t = \frac{1}{4}T$ потоки в роллах через границу прерываются, образуя промежуточное состояние (см. рис. 1b). При $t = \frac{1}{2}T$ потоки по разные стороны границы вновь замыкаются, что приводит к аннигиляции краевых дислокаций (рис. 1c). Через $t = \frac{3}{4}T$ поток через границу снова прерывается и вновь образуется промежуточное

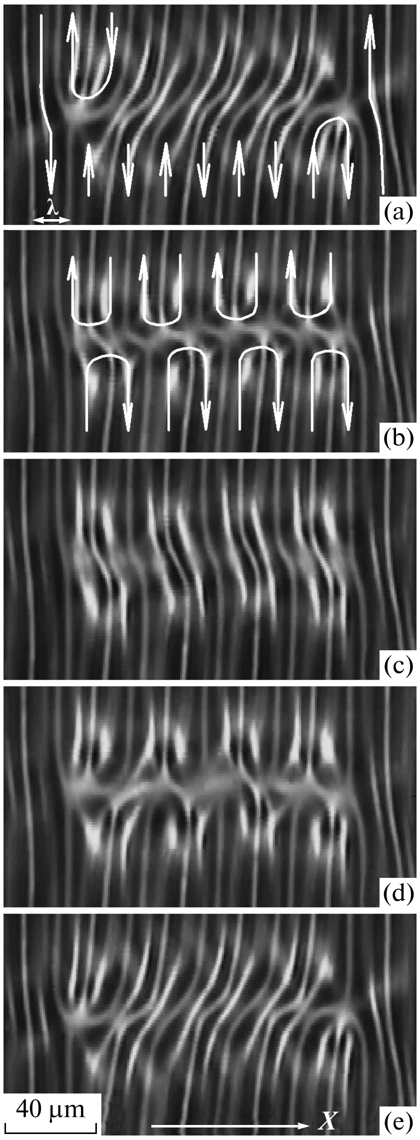

Рис. 1. Динамика дефекта с нулевым топологическим индексом за полный период колебаний $T = 1.28$ с при $U = 1.6U_c$. Интервал между кадрами $\Delta t = 0.32$ с. Стрелками показаны направления аксиальной компоненты гидродинамических потоков в роллах

состояние (рис. 1d). По истечении полного периода осцилляций $t = T$ происходит замыкание потоков с образование краевых дислокаций (рис. 1e).

Таким образом, периодический процесс замыкания и размыкания потока в роллах по разные стороны ядра дефекта связан с периодическим рождением и аннигиляцией двух краевых дислокаций.

На рис. 2 представлена зависимость частоты осцилляций f дефекта с нулевым топологическим индексом от приложенного напряжения U. Она достаточно хорошо описывается линейной функцией, что

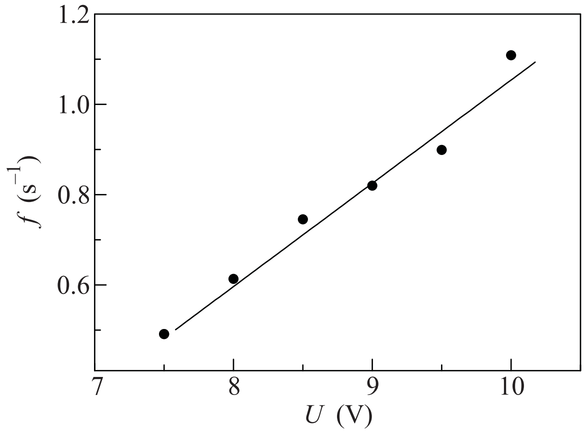

Рис. 2. Зависимость частоты колебаний дефекта f с нулевым топологическим индексом от приложенного напряжения U

коррелирует с линейной зависимостью аксиальной компоненты скорости течения НЖК в ролле от величины приложенного напряжения U [24].

В закрученном на $\pi/2$ НЖК размер элементарной ячейки доменной структуры определяется как $d = 2\lambda$, где λ – поперечный размер ролла, что связано с антипараллельностью аксиальных компонент скорости течения $\mathbf{v}_a$ в соседних роллах (рис. 1a). Это определяет периодичность аккумулированной потенциальной энергии, связанной с конвективным движением нематической жидкости в доменах:

$$V_r = \sum_n V_0 \Big[1 - \cos\Big(\frac{2\pi u_n}{h}\Big)\Big], \qquad (1)$$

где u_n является координатой n-го двойного ролла вдоль горизонтального направления X на рис. 1, $V_0 = \rho v^2 h\lambda l$ [25], ρ – плотность НЖК, v – скорость конвективного течения ($\sim 10^{-5}$ м/с [24]), l – длина двойного ролла. Тогда энергия, приходящаяся на единицу длины сдвоенного ролла, будет равна

$$V_r' = \frac{V_r}{l}, V_0' = \frac{V_0}{l} = \rho v^2 h\lambda. \qquad (2)$$

Для описания движения дефекта в решетке доменов необходимо учесть его механические свойства. Так, перемещение дефекта не является мгновенным и его инерционность можно охарактеризовать, приписав ему некоторую массу, приходящуюся на единицу длины ролла l. Действительно, для его ускорения от одной скорости к другой требуется конечное время и затрата энергии. Эта энергия точно равна той энергии, что необходима для переориентации молекул и энергии процессов диссипации, возникающих при этом.

Однако здесь необходимо уточнение, а именно, выражение (2), по-существу, есть энергия электроконвективного движения нематической жидкости, связанная с механизмом диссипации энергии переменного электрического поля при ЭГД неустойчивости [7], тогда как локальная деформация в теле дефекта и периодические процессы перекоммутации роллов обусловлены неустойчивостью встречных геликоидальных потоков нематика. То есть, внутренняя динамика дефекта, как впрочем и процессы переориентации молекул, энергетически подпитывается гидродинамической подсистемой НЖК. Что же касается величины диссипации энергии при процессах переориентации молекул, то она пренебрежимо мала, так как малы ориентационные вязкости α_i по сравнению с обычной вязкостью нематика. Таким образом, аккумулированная энергия V_r конвективных потоков, связанная с диссипацией энергии электрического поля за счет анизотропии проводимости $\Delta\sigma$, является определяющей как в появлении системы роллов, так и в динамике наблюдаемого процесса. Кроме того, учет диссипативного слагаемого в нашем случае принципиально не меняет подхода к описанию явления [26]. Поэтому в дальнейшем, при выводе соответствующего уравнения движения, диссипацией, связанной с процессами переориентации молекул в динамике дефекта, пренебрегается. Для изучения же более тонких эффектов эволюции двухсолитонного решения в диссипативной среде могут быть использованы результаты работы [26], в которой представлен полный набор сценариев развития двухсолитонных решений в зависимости от соотношения диссипативного и других параметров в уравнении sin-Гордона (см. также [27]).

Далее, энергия взаимодействия соседних двойных роллов $V_{\rm int}$ вдоль направления X определяется относительными отклонениями положений соседних двойных роллов от равновесного расстояния u_0:

$$V_{\rm int} = \frac{k}{2}\sum_n (u_{n+1} - u_n - u_0)^2, \qquad (3)$$

где $k = Kq^2 l$ – константа взаимодействия [7], K – средний модуль упругости НЖК ($K \sim 5\cdot 10^{-12}$ Н), q – волновой вектор доменной структуры ($q = 2\pi/\lambda \sim \sim 10^5\,\text{м}^{-1}$). Относительную величину энергии взаимодействия запишем как $V'_{\rm int} = V_{\rm int}/l$, то есть $k' = = k/l = Kq^2$. Тогда полная потенциальная энергия системы, приходящаяся на единицу длины сдвоенного ролла, будет равна $V' = V'_r + V'_{\rm int}$. Кинетическая энергия запишется в виде

$$K' = \frac{m'}{2}\sum_n \left(\frac{du_n}{dt}\right)^2, \qquad (4)$$

где $m' = m/l$, $m = 2\rho l h \lambda$ – масса двойного ролла, h – толщина ЖК слоя.

Из гамильтониана $H' = V'_r + V'_{\rm int} + K'$ следует уравнение движения для $\tilde{u}_n$:

$$\frac{d^2\tilde{u}_n}{d\tau^2} + \sin\tilde{u}_n - \tilde{k}(\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_{n-1} - 2\tilde{u}_n) = 0; \qquad (5)$$

здесь

$$\tilde{u}_n = \frac{\pi}{\lambda}u_n, \quad \tau = \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{V'_0}{m'}}t, \quad \tilde{k} = (\frac{\lambda}{\pi})^2\frac{k'}{V'_0}.$$

Введем функцию смещения n-го двойного домена относительно его равновесного положения u_{n0} (рис. 1b, d) в цепочке $\eta_n = \tilde{u}_n - \tilde{u}_{n0}$, $\tilde{u}_{n0} = u_{n0}\frac{\pi}{\lambda}$. Под смещением будем понимать процесс замыкания потоков в роллах через границу либо вправо (рис. 1a), либо влево (рис. 1c). После перехода к континуальному приближению получаем уравнение движения

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial\zeta^2} + \sin\eta = 0, \qquad (6)$$

где

$$\eta = \frac{\pi}{\lambda}u, \quad \zeta = 1/(2\lambda\sqrt{\tilde{k}})x.$$

Вообще говоря, дефекты с нулевым топологическим зарядом описываются двухсолитонными решениями. При этом из полного набора двухсолитонных решений (солитон-солитонные столкновения, антисолитон-антисолитонные столкновения, солитон-антисолитонные столкновения и бризеры) нулевым топологическим зарядом обладают только два последних типа решений. Уравнение sin-Гордон позволяет найти решения вида солитон-антисолитонного столкновения в общем случае для различных скоростей солитона и антисолитона, но в данном экспериментальном случае осуществляется столкновение с одинаковыми скоростями. Таких решений два вида [28–30]. Это столкновение не связанных солитона и антисолитона

$$\eta_D(\zeta,\tau) = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{u}\frac{\sin[n(\tau-\tau_0)\gamma]}{\mathrm{ch}[\gamma(\zeta-\zeta_0)]}, \qquad (7)$$

(здесь $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2}$, u – абсолютная величина скорости сталкивающихся солитона и антисолитона) и связанное решение (бризер)

$$\eta_B(\zeta,\tau) = 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\right)\frac{\sin[\omega(\tau-\tau_0)]}{\mathrm{ch}[(\zeta-\zeta_0)\sqrt{1-\omega^2}]}, \qquad (8)$$

где ω – внутренняя частота колебаний бризера. Решение (7) со знаком "+" соответствует столкновению отрицательных солитона ($\eta[\zeta \to -\infty] = -2\pi$,

$\eta[\zeta \to +\infty] = 0$) и антисолитона ($\eta[\zeta \to -\infty] = 0$, $\eta[\zeta \to +\infty] = -2\pi$), которые после столкновения превращаются в положительные солитон ($\eta[\zeta \to -\infty] = 0$, $\eta[\zeta \to +\infty] = 2\pi$) и антисолитон ($\eta[\zeta \to -\infty] = 2\pi$, $\eta[\zeta \to +\infty] = 0$). Соответственно (7) со знаком минус отвечает столкновению положительных солитона и антисолитона, превращающихся после столкновения в отрицательные.

Дефект, представленный на рис. 1, описывается бризерным решением (8). Действительно, динамика экспериментально наблюдаемого дефекта (рис. 1) и динамика бризерного решения (рис. 3) полностью

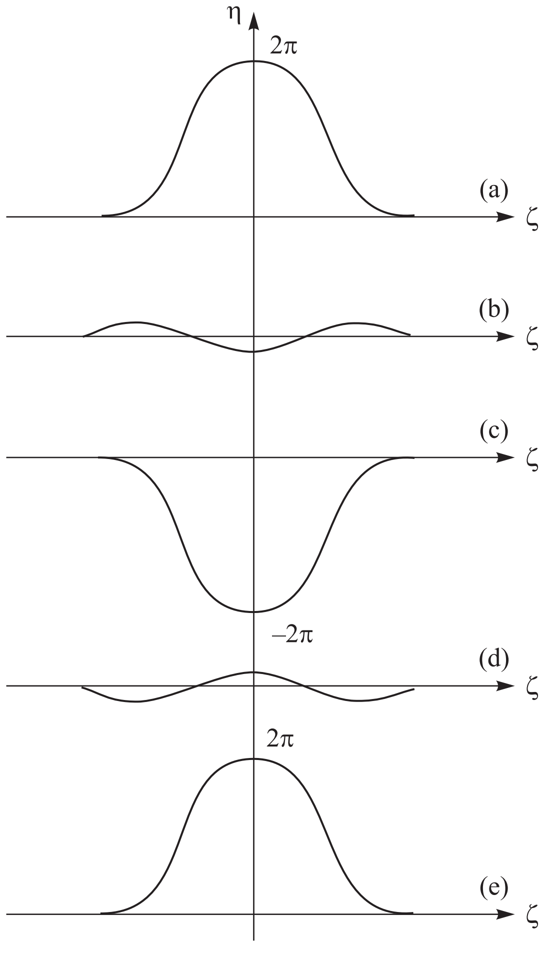

Рис. 3. Эволюция бризерного решения (8)

идентичны. Смещения (вправо) центров пар роллов на рис. 1a, когда потоки замкнуты (вправо), через границу, соответствуют состоянию бризера на рис. 3a, далее, соответственно, рис. 1b – рис. 3b, (образование границы и поток разомкнут), рис. 1c – рис. 3c (смещения влево – поток замкнут), рис. 1d – рис. 3d (поток разомкнут) и рис. 1e – рис. 3e (поток через границу вновь замкнут). Затем цикл повторяется.

Однако необходимо заметить, что наблюдаемый в данном случае дефект является более сложным объектом, и эта нетривиальность связана с внутренними структурными превращениями, происходящими в нем. Это в первую очередь относится к процессу периодического рождения и аннигиляции пары классических дислокаций с топологическими индексами ±1 и некоторой неравномерности их временной динамики по осциллирующему циклу. Учесть подобные особенности поведения представляется возможным, по-видимому, в более сложной модели, например, в рамках возмущенного уравнения (6).

Тем не менее предложенный подход для описания наблюдаемой динамики дефекта уже позволяет увязать некоторые экспериментальные параметры, его характеризующие, с модельными представлениями. В частности, ширина бризера (количество ячеек – двойных роллов, охваченных дефектом на рис. 1) определяется энергией бризера, а энергия бризера в свою очередь зависит от его частоты как $E_B = 2E_{\rm sol}(1-\omega^2)^{1/2}$, где $E_{\rm sol}$ – энергия односолитонного решения. Наблюдаемому объекту (рис. 1) присущи все особенности поведения бризера. Так, при $\omega \to 0$ бризер превращается в двухсолитонное решение (7). В другом предельном случае, $\omega \to 1$, бризер полностью теряет свою энергию и исчезает (см. рис. 4). С учетом нормировки ω в данной задаче переход от со-

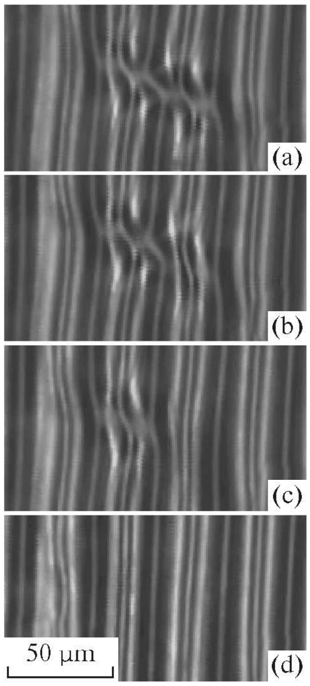

Рис. 4. Исчезновение дефекта при достижении критической частоты $f = 1.1$ Гц, $U = 1.78U_c$

стояния, изображенного на рис. 4a, к состоянию на рис. 4d происходит при частотах $\omega_0 \sim \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{V_0'}{m'}} \sim 1$ Гц, что по порядку величины соответствует верхней границе частот на рис. 2.

В заключение отметим, что ранее в [22, 23] экспериментально была исследована структура и динамика дислокаций с диссоциированным ядром с топологическим индексом ±1. В частности, было показано, что на его краях образуются две частичные дислокации с топологическими индексами $\pm1/2$, которые не существуют в свободном виде [31]. В отличие от таких сингулярных дефектов на краях "дышащей" области (бризера) периодически появляются структурные дислокации с топологическими индексами $+1$ и -1, а суммарный индекс равен нулю. Эти дислокации могут также наблюдаться в свободном виде, что может реализоваться при определенных условиях через распад бризера, которому соответствует решение (7).

Таким образом, в данной работе показано, что осциллирующие дефекты с несингулярным ядром, которые наблюдаются только в закрученных нематиках, описываются решением уравнения sin-Гордон в виде стоячих бризеров (8).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 08-02-97008, # 11-02-97016).

1. P.G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon, Oxford, 1994.
2. M. Kleman, *Points, Lines and Walls in Liquid Crystals, Magnetic Systems and Various Ordered Media*, John Wiley & Sons, Chichester, 1983.
3. М. В. Курик, О. Д. Лаврентович, УФН **154**, 381 (1988).
4. *Defects in Liquid Crystals: Computer Simulations, Theory and Experiments*, Eds. O.D. Lavrentovich, P. Pasini, C. Zannoni, and S. Zumer, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2001.
5. П. В. Долганов, В. М. Жилин, В. К. Долганов, Е. И. Кац, Письма в ЖЭТФ **89**, 181 (2009).
6. О. А. Скалдин, Ю. И. Тимиров, Письма в ЖЭТФ **90**, 699 (2009).
7. С. А. Пикин, *Структурные превращения в жидких кристаллах*, М.: Наука, 1981.
8. *Pattern Formation in Liquid Crystals*, Eds. A. Buka and L. Kramer, Springer-Verlag, New York, 1996.
9. A. Weber, E. Bodenschatz, and L. Kramer, Adv. Mater. **3**, 191 (1991).
10. H. Yamazaki, S. Kai, and K. Hirakawa, J. Phys. Soc. Jpn. **56**, 1 (1987).
11. S. Kai, N. Chizumi, and M. Kohno, J. Phys. Soc. Jpn. **58**, 3541 (1989).
12. S. Nasuno, S. Takeuchi, and Y. Sawada, Phys. Rev. A **40**, 3457 (1989).
13. S. Rasenat, V. Steinberg, and I. Rehberg, Phys. Rev. A **42**, 5998 (1990).
14. E. Bodenschatz, W. Zimmermann, and L. Kramer, J. Phys. France **49**, 1875 (1988).
15. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, Physica D **32**, 135 (1988).
16. L. Kramer, E. Bodenschatz, W. Pesch et al., Liq. Cryst. **5**, 699 (1989).
17. L. Kramer, E. Bodenschatz, and W. Pesch, Phys. Rev. Lett. **64**, 2588 (1990).
18. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, J. Stat. Phys. **64**, 1007 (1991).
19. V. A. Delev and A. P. Krekhov, Mol. Cryst. Liq. Cryst **366**, 2693 (2001).
20. V. A. Delev, P. Toth, and A. P. Krekhov, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **351**, 179 (2000).
21. Г. Р. Якупова, О. А. Скалдин, Письма в ЖТФ **29**, 27 (2003).
22. О. А. Скалдин, Г. Р. Якупова, В. А. Делев и др., ФТТ **47**, 361 (2005).
23. А. Н. Чувыров, О. А. Скалдин, В. А. Делев и др., ЖЭТФ **130**, 1072 (2006).
24. A. Hertrich, A. P. Krekhov, and O. A. Scaldin, J. Phys. II France **4**, 239 (1994).
25. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **67**, 155 (1975).
26. E. S. Shikhovtseva, Physica A **303**, 133 (2002).
27. E. S. Shikhovtseva, Physica A **349**, 421 (2005).
28. G. L. Lamb, Rev. Mod. Phys. **43**, 99 (1971).
29. Р. Парментье, *Флюксоны в распределенных джозефсоновских контактах*, в кн.: *Солитоны в действии*, Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта, М.: Мир, 1981. с. 185–209.
30. J. K. Perring and T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys. **31**, 550 (1962).
31. J. P. Hirth and J. Lothe, *Theory of dislocations*, A Willey-Interscience publications, New York, 1982.