

Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах

Д. Г. Архипов, Г. А. Хабахпашев¹⁾

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отд. РАН,
630090 Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 16 февраля 2011 г.

После переработки 9 марта 2011 г.

Выведено волновое уравнение для моделирования нелинейных плоских уединенных возмущений свободной поверхности неглубокого слоя жидкости. В отличие от модифицированного уравнения Буссинеска новое уравнение способно правильно описать встречное взаимодействие волн небольшой амплитуды. Аналитически показано, что уже в первом порядке теории возмущений столкновение солитонов является неупругим, а его нелинейная динамика качественно отличается от таковой для модифицированного уравнения Буссинеска.

Одной из классических задач физики нелинейных процессов является изучение гравитационных волн малой, но конечной амплитуды в достаточно мелких слоях жидкостей. Наиболее известным примером этого может служить уравнение Кортевега – де Вриза, первоначально полученное именно для слабонелинейных умеренно длинных одномерных возмущений свободной границы жидкости (например, [1]). В дальнейшем оно было применено для описания плоских волн разнообразной физической природы: ионно-звуковых в плазме [2], давления в жидкостях с пузырьками [3], смещения в упругих стержнях [4] и т.п.

Уравнение Буссинеска привлекло к себе широкое внимание исследователей несколько позже (см., [5, 6]). Формально (с математической точки зрения) оно позволяет изучать столкновение плоских волн малой, но конечной амплитуды, бегущих навстречу друг другу. Однако на самом деле уравнение можно вывести только для возмущений, распространяющихся в одну сторону (в этом состоит принципиальное ограничение подобных уравнений, связанное с тем, что в уравнениях движения среды имеются конвективные члены). Лишь в таких ситуациях удавалось исключить скорость жидкости из указанных слагаемых и свести задачу к одному уравнению для возмущения свободной границы. Поэтому описание даже слабонелинейных волн, одновременно бегущих в различные стороны, было возможно только с помощью систем уравнений, содержащих как возмущения свободной поверхности, так и скорость среды (например, [7, 8]).

Целью данной статьи является вывод нового модельного уравнения для описания взаимодействия умеренно длинных плоских локализованных возмущений свободной поверхности слоя жидкости, распространяющихся вдоль горизонтальной координаты одновременно в обе стороны, а также получение решений ряда характерных задач и их анализ.

1. Допущения и модельное уравнение. Благодаря тому, что скорость распространения гравитационных волн много меньше скорости звука в среде, воспользуемся приближением несжимаемости жидкости. Будем считать, что: 1) стационарные составляющие течения среды равны нулю; 2) характерный горизонтальный размер возмущения l_w существенно больше, а его амплитуда η_a значительно меньше равновесной глубины слоя h ($h/l_w \sim \varepsilon^{1/2}$, $\eta_a/h \sim \varepsilon$, где ε – малый параметр); 3) капиллярные эффекты не велики (число Бонда $Bo = \rho gh^2/\sigma > 1$, здесь ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, а σ – поверхностное натяжение); 4) неподвижное твердое дно слабонаклонно; и, наконец, 5) можно пренебречь диссипацией. В рамках сделанных допущений в работе [9] была выведена следующая система уравнений: основное эволюционное уравнение для возмущения свободной поверхности жидкости

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \nabla^2 \eta - g \nabla h \cdot \nabla \eta - \frac{g}{2} \nabla^2 (\eta^2) - \frac{h}{2} \nabla^2 (\mathbf{u}^2) + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) - h^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{Bo} \right) \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

и два простейших линейных вспомогательных уравнения (условие потенциальности движения и линеаризованный закон сохранения массы в слое)

¹⁾ e-mail: theory@itp.nsc.ru

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi, \quad \nabla^2\varphi = -\frac{1}{h}\frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad (2)$$

которых достаточно для определения осредненной величины горизонтальной компоненты вектора скорости жидкости \mathbf{u} , входящей лишь в члены второго порядка малости главного уравнения. Здесь t – время, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ – а оператор градиента в горизонтальной плоскости.

Рассмотрим трансформацию нелинейных плоских локализованных возмущений свободной границы ($\eta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$), одновременно распространяющихся как в направлении роста горизонтальной координаты x , так и в противоположную сторону. Если ввести вспомогательную функцию ψ с помощью равенств $\partial\psi/\partial t = -(h + \eta)u$ и $\partial\psi/\partial x = \eta$, то закон сохранения массы выполняется тождественно, а в члене второго порядка малости, содержащем u^2 , можно заменить u на $-(\partial\psi/\partial t)/h$. Далее проинтегрируем новое уравнение по координате от x до ∞ . В итоге система модельных уравнений (1), (2) сводится к следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{g}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 \right] - h^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\text{Bo}} \right) \frac{\partial^4\psi}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Отметим, что для исследуемых задач можно использовать и уравнение, выведенное в статье [10], но оно является интегро-дифференциальным.

2. Приближенные аналитические решения.

Вначале рассмотрим случай горизонтальности дна ($h = \text{const}$). Среди стационарно бегущих решений модельного уравнения (3), конечно же, есть

$$\psi = \eta_s L \tanh[(x - x_0 - Ut)/L], \quad (4)$$

$$L = 2\sqrt{\beta \left(\frac{1}{3} + \frac{h}{\eta_s} \right)}, \quad U = \pm \sqrt{gh \frac{1 + \eta_s/(3h)}{1 - 2\eta_s/(3h)}},$$

где $\beta = h^2(1/3 - 1/\text{Bo})$. Из этих решений получаем уединенные волны $\eta = \eta_s \text{sech}^2[(x - x_0 - Ut)/L]$. Очевидно, что при $\text{Bo} > 3$ эти солитоны положительны, а при $\text{Bo} < 3$ – отрицательны.

Наиболее интересной областью применения уравнения (3) является изучение процесса встречного столкновения двух уединенных волн. В используемом приближении это можно сделать с помощью теории возмущений. Будем искать решения уравнения (3) в форме $\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi_1(\xi_1) + \psi_2(\xi_2) + \psi'(\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1 = x - U_1 t$ и $\xi_2 = x + U_2 t$. Тогда ряд членом со-

кратится благодаря двум равенствам, вытекающим из уравнения (3) для солитонных решений:

$$(U_i - gh) \frac{\partial^2\psi_i}{\partial \xi_i^2} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\frac{g}{2} \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + \frac{U_i^2}{h} \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] - h^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\text{Bo}} \right) \frac{\partial^4\psi_i}{\partial \xi_i^4} = 0.$$

Здесь индекс i равен 1 или 2. В результате уравнение (3) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{U_1 U_2 - gh/2}{U_1 U_2 h + gh^2} \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2\psi_2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial\psi_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial \xi_1^2} \right). \quad (5)$$

При этом были опущены смешанные производные $\partial^2\psi/\partial \xi_1 \partial \xi_2$ в членах второго порядка малости, то есть в нелинейных и дисперсионных членах. После интегрирования по обоим новым независимым переменным можно легко получить вид поправки

$$\psi'(\xi_1, \xi_2) = \frac{U_1 U_2 / h - g/2}{U_1 U_2 + gh} \times \left\{ [\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\infty)] \frac{d\psi_2}{d\xi_2} + [\psi_2(\xi_2) - \psi_2(-\infty)] \frac{d\psi_1}{d\xi_1} \right\}.$$

Очевидно, что $\eta(\xi_1, \xi_2) = \eta(\xi_1) + \eta_2(\xi_2) + \eta'(\xi_1, \xi_2)$, поэтому $\eta' = \partial\psi'/\partial x = \partial\psi'/\partial \xi_1 + \partial\psi'/\partial \xi_2$.

Для слабонелинейных волн, бегущих в произвольном, но преимущественно одном направлении, можно заменить \mathbf{u}^2 на $\eta^2 g/h$, а $\partial\eta/\partial t$ на $-\nabla\mathbf{u}/h$. Тогда из системы уравнений (1), (2) легко перейти к модифицированному уравнению Буссинеска:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{3}{2}g\frac{\partial^2(\eta^2)}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^4\eta}{\partial t^2 \partial x^2} = 0,$$

которое имеет следующие солитонные решения:

$$\eta_B = \eta_s \text{sech}^2[(x - x_0 - U_B t)/L_B], \\ L_B = 2\sqrt{\beta \left(1 + \frac{h}{\eta_s} \right)}, \quad U_B = \pm \sqrt{gh \left(1 + \frac{\eta_s}{h} \right)}.$$

Поправка и для решения модифицированного уравнения Буссинеска находится аналогичным образом:

$$\eta'_B(\xi_{1B}, \xi_{2B}) = -3g \eta_{1B}(\xi_{1B}) \eta_{2B}(\xi_{2B}) / (U_{1B} U_{2B} + gh).$$

Здесь введены новые переменные $\xi_{1B} = x - U_{1B} t$ и $\xi_{2B} = x + U_{2B} t$.

На рис. 1 показаны профили поправок η' (сплошные кривые) и η'_B (пунктирные линии), обезразмеренных на среднюю амплитуду исходных уединенных волн ($\eta'_* = \eta' / [(\eta_{1s} + \eta_{2s})/2]$) для двух моментов

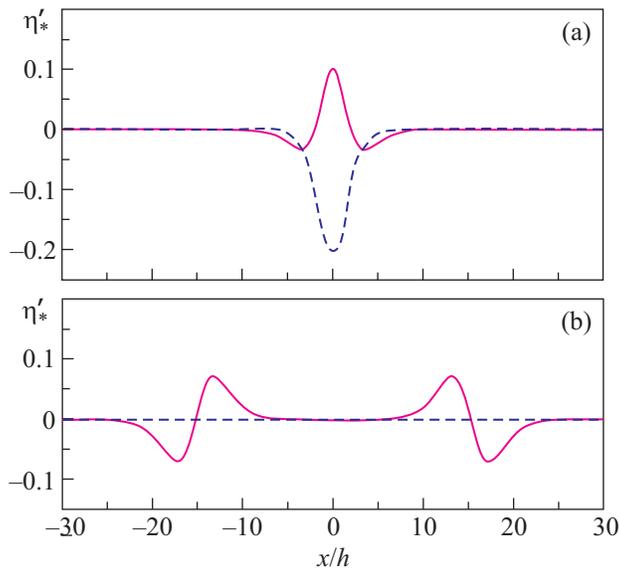


Рис. 1. Зависимости поправок η' и η'_B от координаты при $\eta_{1s} = \eta_{2s} = 0.15 h$ и $x_0 = 15 h$ в два разных момента времени: $t^* = t\sqrt{g/h} = 14$ (a) и $t^* = 28$ (b)

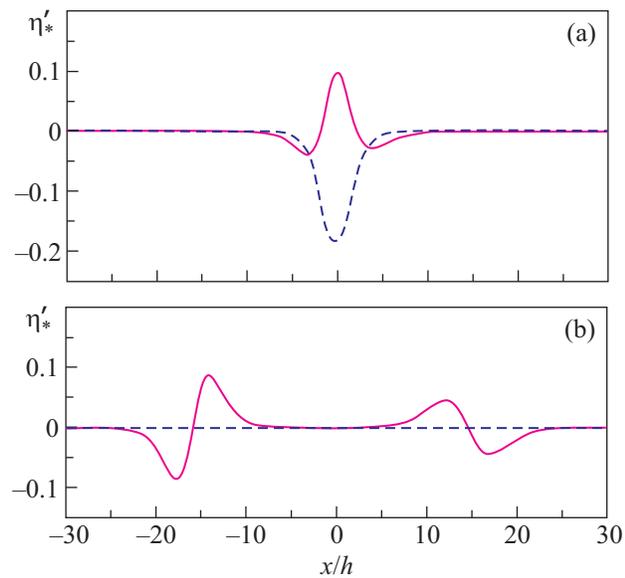


Рис. 2. Зависимости поправок η' и η'_B от координаты при $\eta_{1s} = 0.1 h$, $\eta_{2s} = 0.2 h$ и $x_0 = 15 h$ в два разных момента времени: $t^* = 14$ (a) и $t^* = 28$ (b)

времени (первый из них соответствует максимальному взаимодействию сталкивающихся возмущений, а второй – последующему разбеганию волн). Хорошо видно, что из решения модифицированного уравнения Буссинеска получилось лишь упругое столкновение двух солитонов, а волновое уравнение (3) способно описать неупругое взаимодействие уединенных волн.

При одинаковых амплитудах исходных солитонов в момент наибольшего взаимодействия возмущений происходит практически полная остановка жидкости. Следовательно, кинетическая энергия слоя становится пренебрежимо малой, а потенциальная – наоборот, максимальной. Напомним, что при выводе модифицированного уравнения Буссинеска предполагалось, что скорость жидкости пропорциональна возмущению свободной поверхности, то есть в момент наибольшего взаимодействия волн кинетическая энергия слоя достигает своего максимума. Это объясняет, почему расчет по модифицированному уравнению Буссинеска дает занижение амплитуды примерно на 15%. Подчеркнем, что результаты вычислений по системе уравнений (1), (2) [11] и по модельному уравнению (3) практически совпадают (расхождение менее 1%).

На рис. 2 представлены аналогичные решения для тех же двух моментов времени, что и на рис. 1, но в случае, когда первоначальные амплитуды солитонов отличались в два раза. И снова расчет по модифицированному уравнению Буссинеска занижает

амплитуду возмущения в момент наибольшего взаимодействия волн приблизительно на 14%.

3. Результаты ряда численных решений. Хотя нелинейные члены в уравнении (3) отличаются от соответствующих в модифицированном уравнении Буссинеска, для проведения вычислительных экспериментов была использована трехслойная неявная конечно-разностная схема, подобная [12]. Вначале разработанная программа была протестирована с помощью аналитического решения (4). Солитоны распространялись с постоянной скоростью и неизменной формой (закон сохранения массы выполнялся с относительной точностью 10^{-6}). Подчеркнем, что солитонное решение (4) чрезвычайно чувствительно к ошибкам вычислений, так как его профиль формируется только при балансе вкладов нелинейных и дисперсионных членов, имеющих второй порядок малости. Затем были выполнены расчеты по трансформации двух солитонов, бегущих в одном направлении над горизонтальным дном. Как и в случае с уравнением Кортевега – де Вриза [5, 6], наблюдались их обгонное и обменное взаимодействия, когда амплитуда второй волны была больше амплитуды первой в три и два раза, соответственно. При этом имели место сдвиги фаз и возвращение обоих возмущений к прежним амплитудам. Аналогичные результаты, конечно же, имели место и для системы модельных уравнений (1), (2) [11].

На рис. 3 продемонстрировано столкновение двух уединенных волн не только над горизонтальным

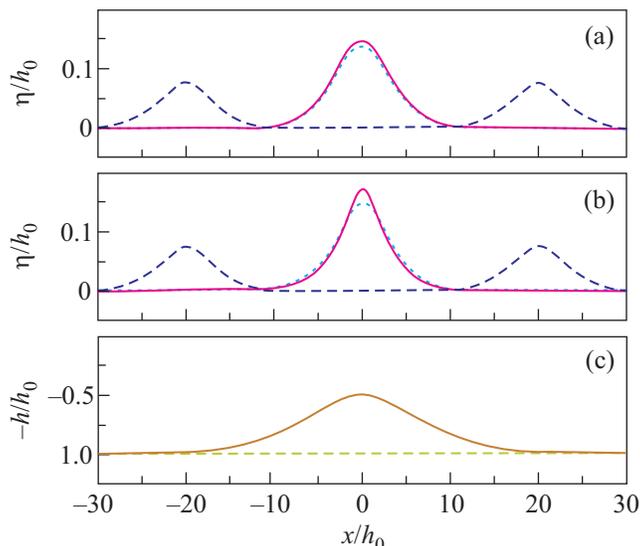


Рис. 3. Встречное столкновение двух уединенных волн над горизонтальным дном (а) и над подводным хребтом (б), а также профили дна (с)

дном, но и над подводным хребтом $h = h_0 \{1 - 1/[2 \cosh^2(x/2L)]\}$. На рис. 3а, б штриховые линии соответствуют начальному моменту времени, а остальные $-t^* = 20$ (здесь также сплошные кривые – расчет по уравнению (3), а пунктирные линии – вычисления по модифицированному уравнению Буссинеска). Хорошо видно, что, как и следовало ожидать, над подводным хребтом возмущение становится заметно более узким и высоким, чем над горизонтальным дном.

4. Заключение. Подводя итог данной работы, выделим ее основные результаты. Введена специальная вспомогательная функция, для которой получено одно уравнение в частных производных типа волнового уравнения. Это уравнение позволяет решать задачи взаимодействия умеренно длинных слабонелинейных плоских локализованных волн. С помощью теории возмущений показано, что, в отличие от модифицированного уравнения Буссинеска, новое уравнение способно описать неупругое встречное взаимодействие волн небольшой амплитуды. Найдены аналитические решения задачи о столкновении двух солитонов в слое жидкости над горизонтальным дном и численные решения аналогичной задачи над пологим дном.

Авторы признательны В.Е. Захарову, Е.А. Кузнецову, Л.А. Островскому, Е.Н. Пелиновскому, Ю.А. Степанянцу и О.Ю. Цвелодубу за полезные обсуждения данного исследования на его начальном этапе. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах # 11.G34.31.0035 (В.Е. Захаров – ИГУ).

1. Дж. Майлс, в кн. *Современная гидродинамика. Успехи и проблемы*, М.: Мир, 1984. [J. W. Miles, *J. Fluid Mech.* **106**, 131 (1981)].
2. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, *ЖЭТФ* **46**, 1880 (1964). [Yu. A. Berezin and V. I. Karpman, *Sov. Phys.- JETP* **19**, 1265 (1964)].
3. В. В. Кузнецов, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев, И. Р. Шрейбер, *Письма в ЖЭТФ* **23**, 194 (1976) [V. V. Kuznetsov, V. E. Nakoryakov, B. G. Pokusaev, I. R. Shreyber, *Sov. Phys.- JETP Letters* **23**, 172 (1976)].
4. И. Л. Боголюбский, *Письма в ЖЭТФ* **24**, 184 (1976) [I. L. Bogolyubskii, *Sov. Phys.- JETP Letters* **24**, 160 (1976)].
5. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, М.: Мир, 1977 [G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, N.Y.: Wiley Interscience, 1974].
6. Л. А. Островский, А. И. Потапов, *Введение в теорию модулированных волн*, М.: Физматлит, 2003 [L. A. Ostrovsky and A. I. Potapov, *Modulated Waves: Theory and Applications*, Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press, 1999].
7. D. H. Peregrine, *J. Fluid Mech.* **27**, 815 (1967).
8. В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, М.: Наука, 1973. [V. I. Karpman, *Non-Linear Waves in Dispersive Media*, Oxford: Pergamon Press, 1975].
9. Д. Г. Архипов, Г. А. Хабахпашев, *Докл. АН* **409**, 476 (2006) [D. G. Arkhipov and G. A. Khabakhpashev, *Doklady Physics* **51**, 418 (2006)].
10. R. S. Johnson, *J. Fluid Mech.* **323**, 65 (1996).
11. D. G. Arkhipov, G. A. Khabakhpashev, and N. S. Safarova, *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design* **115**, 297 (2011).
12. А. А. Литвиненко, Г. А. Хабахпашев, *Вычислительные технологии* **4** (3), 95 (1999).