Письма в ЖЭТФ, том 93, вып. 9, с. 552 – 554

Парадокс нелинейного светоделителя и селекция фотонных флуктуаций

А. В. Белинский[1], *А. А. Грановский*

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 декабря 2010 г.

После переработки 6 апреля 2011 г.

Установлено, что нелинейный светоделитель является интересным объектом исследования по следующим причинам. Во-первых, классическая и квантовая теории его описания дают прямо противоположные результаты поведения фазовых флуктуаций: согласно классической, – фаза неизменна, а квантовой, – флуктуации фазы растут или уменьшаются в зависимости от подавления или роста амплитудных флуктуаций. Во-вторых, квантовые флуктуации входной моды могут быть разделены на амплитудные и фазовые, так что в одну выходную моду, скажем отраженную, направляются преимущественно фазовые флуктуации, а в другую (проходящую) – амплитудные.

На пути поиска адекватной интерпретации квантовой теории важную роль играет выявление существенно неклассических эффектов, описание которых квантовой и классической теориями дают радикально отличающиеся друг от друга результаты. Собственно говоря, именно такой эффект – ультрафиолетовая катастрофа – и положил начало новому разделу физики. Существенного продвижения в поисках смысла квантового формализма достиг Эйнштейн с его знаменитым парадоксом ЭПР [1]. Дальнейшие вехи такого рода исследований – теорема и серия парадоксов Дж. Белла [2] (и см., например, [3]), эффекты многофотонной интерференции [4, 5] и др. В русле этого направления написано и настоящее письмо.

Фаза плоской волны, отраженной плоской границей раздела прозрачных сред, инвариантна с точностью до возможного скачка на π. Если одна из сред обладает действительной кубической нелинейностью, то за счет зависимости показателя преломления, а значит, и коэффициентов пропускания и отражения, от интенсивности света достигается подавление фотонных флуктуаций в отраженном или проходящем пучке [6]. Например, для стабилизации отраженного пучка надо, чтобы разность показателей преломления граничащих сред, а значит, и коэффициент отражения уменьшались с ростом интенсивности. Тогда флуктуационное увеличение интенсивности входного пучка будет компенсироваться уменьшением коэффициента отражения. При этом, однако, складывается парадоксальная ситуация: амплитудные флуктуации уменьшаются, а фазовые должны оставаться неизменными, что приводило бы к нарушению принципа неопределенности Гайзенберга. В линеаризованном по фотонным флуктуациям приближении [7], правильно предсказывающем подавление амплитудных шумов, фазовые, к сожалению, не удается описать адекватно. Поэтому пришлось искать точное квантовое решение рассматриваемой нелинейной задачи.

Пусть на одном из входов светоделителя (слева, см. рис. 1) – фоковское состояние $|n\rangle$ с определенным числом фотонов n, а на другом (сверху) – вакуум. Если бы светоделитель был линейным, то состояние на выходе описывалось бы вектором [8]

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{C_k^n}\tau^k \rho^{n-k}|k\rangle|n-k\rangle; \qquad (1)$$

здесь прошло k фотонов, а отразилось $n-k$, τ и ρ – френелевские амплитудные коэффициенты пропускания и отражения, $\tau^2+\rho^2=1$. C_k^n – биномиальный коэффициент.

Нелинейность можно учесть зависимостью τ и ρ от $2n-k$ в случае первой нелинейной среды (см. рис. 1), а второй – линейной, и от k в случае обратного их расположения. При этом можно использовать обычные формулы зависимости τ и ρ от показателей преломления сред. Например, для s-поляризации:

$$\rho = -\frac{\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)}, \qquad (2)$$

где ϑ_1 и ϑ_2 – соответственно углы падения и преломления, а показатель преломления нелинейной среды линейно увеличивается с ростом интенсивности света: $n_1 = n_{10} + \chi(2n-k)$ в случае первой нелинейной среды, n_{10} – ее показатель преломления в темноте, или $n_2 = n_{20} + \chi k$ – в случае второй. Нелинейная добавка показателя преломления пропорциональна чис-

[1]e-mail: belinsky@inbox.ru

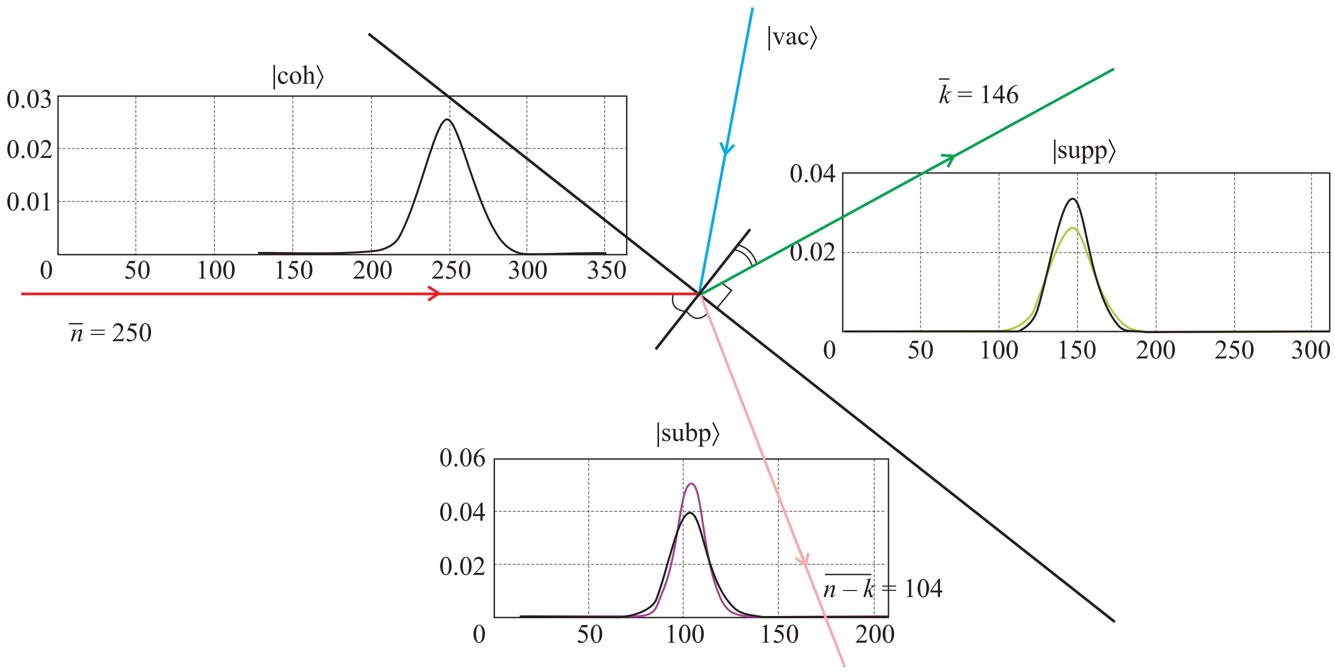

Рис. 1. Нелинейный светоделитель: первая среда (слева от жирной границы раздела) нелинейна, ее показатель преломления меньше, чем у второй (линейной) среды. На входе – когерентное состояние с пуассоновским распределением статистики фотонов и средним значением 250. В отраженном пучке – субпуассоновское состояние (среднее значение 104), а в проходящем – суперпуассоновское (среднее значение 146). Для сравнения показаны пуассоновские распределения

лу фотонов в среде, а коэффициент пропорциональности χ в свою очередь пропорционален коэффициенту кубической нелинейности $\chi^{(3)}$, см., например, [9].

При произвольном состоянии на входе $|\,\rangle$, например, когерентном $|z\rangle$,

$$|\,\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} D_n |n\rangle :$$

$$|\psi\rangle \propto \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sum_{k=0}^{n} \sqrt{C_k^n}\, \tau^k \begin{pmatrix} 2n-k \\ k \end{pmatrix} \times$$

$$\times \rho^{n-k} \begin{pmatrix} 2n-k \\ k \end{pmatrix} |k\rangle |n-k\rangle \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \Lambda_{k,n-k} |k\rangle |n-k\rangle. \qquad (3)$$

Здесь двухэтажные аргументы при τ и ρ означают зависимость от верхнего или нижнего этажей для той или иной последовательности расположения нелинейной и линейной сред, о чем было сказано выше. В силу нелинейности задачи приходится производить перенормировку.

Распределения вероятностей обнаружить определенное число фотонов в отраженном и проходящем пучках, таким образом, равны (см. рис. 1)

$$P_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_{k,n-k}^2, \quad P_k = \sum_{n-k=0}^{\infty} \Lambda_{k,n-k}^2. \qquad (4)$$

Фазовые флуктуации можно оценить следующим образом. Пусть среднее значение комплексной амплитуды z входного состояния $|z\rangle$ действительно. Используя операторы рождения (a^+) и уничтожения (a) фотона, введем квадратурные компоненты $X = (a + a^+)/2$, $Y = (a - a^+)/i2$, тогда дисперсия флуктуаций первой будет определять амплитудные флуктуации, а второй – фазовые:

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle \approx \frac{\langle \psi | (\Delta Y)^2 | \psi \rangle}{\bar{k} + 1/2}. \qquad (5)$$

Здесь дисперсия фазовых флуктуаций записана для проходящего пучка (с очевидной заменой k на $n-k$ для отраженного). Приближение касается условия достаточно большой интенсивности: $\bar{k} \gg 1$.

Можно ввести квадратурную компоненту более общего вида:

$$X(\phi) = (ae^{-i\phi} + a^+ e^{i\phi})/2, \qquad (6)$$

тогда квадратный корень из дисперсии флуктуаций этой квадратуры в полярных координатах даст так называемое "тело неопределенности", в пределах которого значения комплексной амплитуды поля наиболее вероятны (рис. 2).

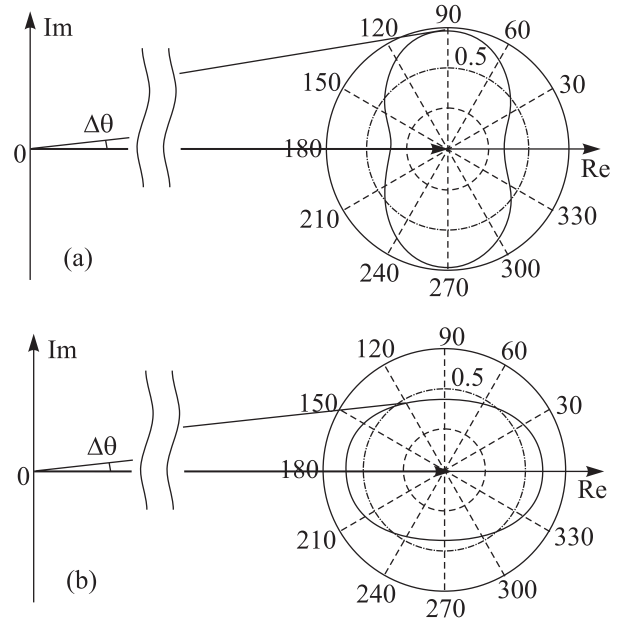

Рис. 2. Тело неопределенности для отраженного (a) и проходящего (b) пучков на комплексной плоскости. Вектор – среднее значение комплексной амплитуды (в данном случае действительное). Среднеквадратическое отклонение фазовых флуктуаций определяется углом $\Delta\theta$. Для сравнения показано тело неопределенности когерентного состояния – круг единичного диаметра (пунктир). Видно, что при вытянутом в вертикальном направлении теле неопределенности (a) фазовые флуктуации растут, а амплитудные – уменьшаются (по сравнению с когерентным состоянием). В проходящем пучке – наоборот. Численные значения дисперсий квадратур: $\langle \Delta X^2 \rangle \approx 0.71$, $\langle \Delta Y^2 \rangle \approx 1.47$ для (a), и $\langle \Delta X^2 \rangle \approx 1.22$, $\langle \Delta Y^2 \rangle \approx 0.85$ для (b). Разность показателей преломления в темноте 0.1, безразмерный коэффициент χ принят равным 1/3500

Расчеты показали, что если первая среда нелинейна и ее показатель преломления меньше второй, то в отраженном пучке получается субпуассоновское состояние (с подавленными амплитудными флуктуациями, см. рис. 1), а фазовые флуктуации увеличиваются (рис. 2) – в полном соответствии с принципом неопределенности Гайзенберга, который оказывается "сильнее" классической интуиции о неизменности фазы. Причина, по-видимому, в вакуумных флуктуациях, поступающих на светоделитель сверху (см. рис. 1). Удивительна и неадекватность (в этом смысле) линеаризованного по фотонным флуктуациям приближения, поскольку условие значительного превышения средней амплитудой ее среднеквадратического флуктуационного отклонения, казалось бы, достаточно для применимости теории возмущений первого порядка.

Подавленные фотонные флуктуации никуда не исчезают: они переходят в проходящий пучок, и он становится суперпуассоновским (рис. 1). Зато в проходящем пучке фазовые флуктуации уменьшаются по сравнению с когерентным состоянием (рис. 2). Это позволяет говорить о *селекции фотонных флуктуаций*: амплитудные флуктуации отфильтровываются в проходящий пучок, а фазовые – в отраженный. При классическом описании такого рода нелинейная фильтрация оказывается ущербной, поскольку она распространяется только на амплитудные флуктуации, а фазовые остаются неизменными.

Аналогичные результаты получаются и при обратной последовательности линейной и нелинейной сред.

Интересно, что классический сигнал на входе со слабой амплитудной модуляцией оказывается усиленным относительно среднего значения интенсивности в прошедшем пучке, хотя светоделитель представляет собой пассивное устройство.

Рассмотренные эффекты, как хочется надеяться, представляют не только эвристический интерес, но и могут найти практическое применение в информационных системах кодирования и передачи сигналов на фоне помех, особенно в связи с бурно развивающейся квантовой криптографией.

Работа выполнена в соответствии с тематикой гранта РФФИ # 11-02-00610а.

---

1. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
2. J. S. Bell. Physics **1**, 195 (1964).
3. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, УФН **163**, № 8, 1 (1993).
4. А. В. Белинский, Письма в ЖЭТФ **54**, 13 (1991).
5. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **102**, 116 (1992).
6. А. В. Белинский, Письма в ЖЭТФ **51**, 341 (1990).
7. А. В. Белинский, *Квантовые измерения*, М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008, с. 154.
8. U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge University Press, 1997.
9. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, М.: Наука, 1980.