Письма в ЖЭТФ, том 93, вып. 9, с. 561 – 565

Распределение кондактанса линейной цепочки туннельных барьеров с фрактальным беспорядком

Р. Т. Сибатов[1)]

Ульяновский государственный университет, кафедра теоретической физики, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 2 марта 2011 г.

Получены распределения кондактанса G длинной квантовой проволоки с фрактальным распределением барьеров в режиме последовательного некогерентного туннелирования. Асимптотическое ($L \to \infty$) поведение моментов $\langle G^k(L)\rangle$, средней мощности дробового шума $\langle S(L)\rangle$ и фактора Фано находятся в согласии с результатами работы [C. W. J. Beenakker et al., Phys. Rev. B **79**, 024204 (2009)], сами распределения хорошо описывают результаты численного моделирования методом Монте-Карло. Получено уравнение для распределений сопротивления и кондактанса, которое согласуется с недавно полученным дробно-дифференциальным обобщением уравнения Дорохова-Мелло-Перейра-Кумара для квазиодномерных многоканальных неупорядоченных проводников с самоподобным распределением рассеивателей.

В недавних теоретических работах [1, 2] изучается проводимость одномерной квантовой системы с беспорядком фрактального типа, характеризующимся асимптотически степенным распределением расстояния между ближайшими рассеивателями. Эти исследования мотивировались двумя недавними экспериментальными работами. В первой из них Кохно и Йошида [3] продемонстрировали скейлинговое поведение модуляций диаметра выращенной полупроводниковой нанопроволоки SiC. Такое поведение соответствует негауссову характеру флуктуаций толщины проволоки. Влияние гауссовых флуктуаций на электропроводность изучалось, например, в [4]. В другой экспериментальной работе Бартелеми с соавторами [5] сообщили о возможности создания оптического неупорядоченного материала, в котором фотоны совершают блуждания Леви, характеризующиеся распределениями пробегов асимптотически степенного типа $p(d) \propto d^{-1-\alpha}$ для $d \to \infty$, где $0 < \alpha < 2$. Такая система была названа “Леви-стеклом”.

В работе [2] рассматривалась система (рис. 1), представляющая собой линейную цепочку туннельных барьеров, которая характеризуется асимптотически степенным распределением расстояния между барьерами. Каждый барьер имеет одинаковую вероятность передачи $\Gamma \ll 1$ и сопротивление $\rho = h/e^2 N\Gamma$, где N – число поперечных мод. Авторы [2] рассматривают режим некогерентного последовательного туннелирования (не резонансное туннелирование), причем $N\Gamma \ll 1$, то есть $\rho \ll h/e^2$, и эффектом кулоновской блокады можно пренебречь. В этом случае сопротивление цепочки барьеров представляет собой сумму сопротивлений каждого барьера $R = \rho K$, где $K(L)$ – случайное число барьеров в проволоке длиной L. Режим реализуется в случае большого числа поперечных мод M или в случае короткой длины фазовой когерентности. Бинейккер с соавторами [2] получили асимптотические формулы для моментов кондактанса, с помощью которых вычислили относительные флуктуации, средний спектр дробового шума и фактор Фано.

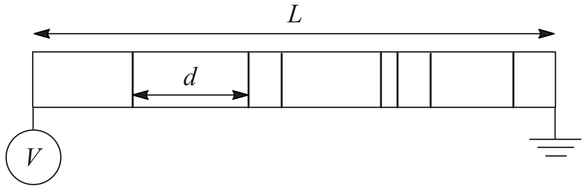

Рис. 1. Линейная цепь случайно распределенных туннельных барьеров

Фальчето и Гопар [1] рассматривают проводимость фрактальной проволоки в режиме слабой локализации. Авторы вычисляют распределения G, пользуясь решением уравнения Дорохова-Мелло-Перейра-Кумара (ДМПК-уравнения), модифицируя его с учетом числа рассеивателей с фрактальным распределением. Однако известно, что ДМПК-уравнение выводилось в предположении об однородном распределении рассеивателей $\langle K(L)\rangle \propto L$, и неприменимо для дробного скейлинга $\langle K(L)\rangle \propto L^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. В связи с этим возникают два вопроса. Возможно ли обобщить ДМПК-уравнение на случай фрактального распределения рассеивателей и правомерна ли модификация решения, используемая в [1] для фрактальной проволоки? На оба вопроса в предлагаемой работе даются утвердительные ответы. Подробно мы рассмотрим режим некогерентного последовательно-

[1)]e-mail: ren_sib@bk.ru

го туннелирования через фрактальную цепочку барьеров. Эта система является частным случаем одномерной многоканальной системы с фрактальным беспорядком, для которой неприменимо известное ДМПК-уравнение. С этой точки зрения она может рассматриваться в качестве основы для разработки подхода к анализу переноса в мезоскопических системах с фрактальным беспорядком.

Математической основой для рассматриваемой здесь системы туннельных барьеров может послужить модель газа Леви-Лоренца, рассматриваемая в [6–9]. Авторы [6] исследуют рассеяние частиц неподвижными точечными рассеивателями, расположенными на прямой, причем интервалы ξ между ними – независимые случайные величины, одинаково распределенные по закону со степенной асимптотикой. Пусть, например, дополнительная функция распределения $Q(x)$ удовлетворяет соотношению

$$Q(x) = P(d > x) \sim \frac{(x/l)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad l > 0, \quad x \to \infty.$$

В случае конечного $\langle\xi\rangle$ (то есть $\alpha > 1$) среднее число рассеивателей на отрезке большой длины L пропорционально L, а относительные флуктуации стремятся к нулю [7]. Это означает, что для любой гладкой функции $f(N(L), L)$ величины $N(L)$ справедливо свойство самоусреднения, то есть $\langle f(N(L), L)\rangle \to \to f(\langle N(L)\rangle, L)$, при $L \to \infty$. В случае $\alpha < 1$ становится важным зафиксировать рассеиватель, с которого начинается построение множества, среднее число рассеивателей $\langle N(L)\rangle \propto L^\alpha$ для $L \to \infty$, и относительные флуктуации $\Delta N/\langle N\rangle$ не убывают с увеличением L, а стремятся к постоянной величине, и, как следствие, среда не обладает свойством самоусреднения. В работах [8, 9] рассматривалось блуждание на фрактальном газе Лоренца, продемонстрирована роль корреляций, связанная с "замороженностью" беспорядка. Также показано, что блуждание на стохастическом фрактале отличается от полетов Леви как предельными распределениями [8], так и кинетическими уравнениями [9].

Для рассматриваемого режима некогерентного туннелирования $R = \rho N(L)$, и плотность распределения сопротивления $w_R(r; L)$ напрямую связана с распределением $w_N(n; L)$ числа барьеров $N(L)$. Последнее может быть найдено с помощью соотношения

$$w_N(n; L) = \mathsf{P}\{N(L) = n\} = \mathsf{P}\{N(L) \geq n\} -$$

$$-\mathsf{P}\{N(L) \geq n+1\} = Q^{*n}(L) - Q^{*(n+1)}(L),$$

где $Q(x)$ – дополнительная функция распределения расстояния между барьерами, а $Q^{*n}(x)$ – n-кратная свертка. Переходя к образу Лапласа

$$\widetilde{w}_N(n; s) = \int_0^\infty e^{-sL} w_N(n; L),$$

получаем

$$\widetilde{w}_R(r; s, \alpha) = \rho^{-1}\ w_N\left(\frac{r}{\rho}, L\right) = \frac{[\widetilde{q}(s)]^{r/\rho} - [\widetilde{q}(s)]^{1+r/\rho}}{s\rho},$$

где $\widetilde{q}(s)$ – трансформанта Лапласа плотности распределения ξ.

Для $L \to \infty$ и $r/\rho \gg 1$, разность в числителе дроби можно рассматривать как дифференциал,

$$\widetilde{w}_R(r; s, \alpha) = \frac{1}{s\rho}\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\widetilde{q}(s)]^x \bigg|_{x=r/\rho} = \frac{\ln\widetilde{q}(s)}{s\rho}\left[\ \widetilde{q}(s)\ \right]^{r/\rho}.$$

Взяв в качестве плотности распределения расстояний между соседними барьерами одностороннюю устойчивую плотность $q(x) = l^{-1}g^{(\alpha)}(x/l)$, имеющую образ Лапласа $\widetilde{q}(s) = e^{-(ls)^\alpha}$ [7, 11], приходим к

$$\widetilde{w}_R(r; s, \alpha) = \frac{l}{\rho}\,(ls)^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{r}{\rho}\ l^\alpha s^\alpha\right).$$

Обратное преобразование Лапласа этого выражения дает

$$w_R(r; L, \alpha) = \frac{L}{\alpha\rho\, l}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{-1-1/\alpha}\ g^{(\alpha)}\left(\frac{L}{l}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{-1/\alpha}\right). \tag{1}$$

Это дробно-устойчивая плотность [10], она удовлетворяет дробно-дифференциальному уравнению [7]

$${}_0\mathsf{D}_L^\alpha\, w_R(r; L, \alpha) + \rho l^{-\alpha}\, \frac{\partial w_R(r; L, \alpha)}{\partial r} = \delta(r-\rho)\frac{L^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Здесь

$$\mathsf{D}_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^\alpha}d\xi.$$

– дробная производная Римана-Лиувилля.

Плотность $w_G(y; L, \alpha)$ кондактанса $G(L)=1/R(L)$

$$w_G(y; L, \alpha) = y^{-2}\ w_R(r; L, \alpha)\Big|_{r=1/y} =$$

$$= \frac{L}{\alpha\rho l y^2}\,(y\rho)^{1+1/\alpha}\ g^{(\alpha)}\left(Ll^{-1}\,(y\rho)^{1/\alpha}\right),$$

$$0 < y < \rho^{-1}. \tag{2}$$

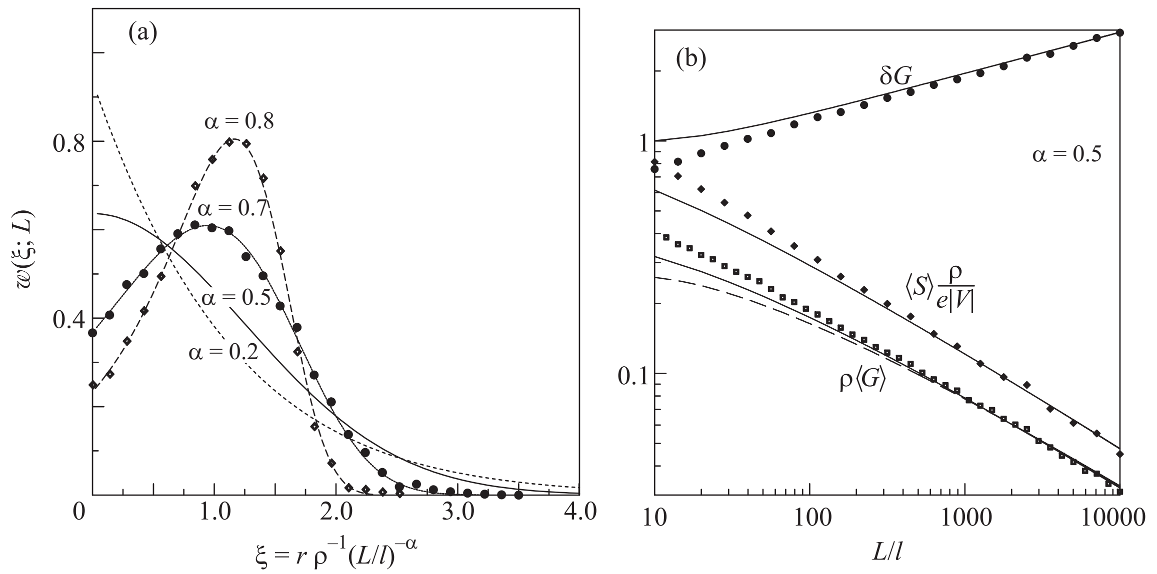

Рис. 2. (a) Плотность распределения $w(\xi;L)$ приведенного сопротивления $\Xi = Rl^\alpha/\rho L^\alpha$ квантовой проволоки длиной L для различных значений α. Линии – расчет по формуле (1), точки – результат численного моделирования методом Монте-Карло. (b) Зависимость среднего значения $\langle G\rangle$ и относительных флуктуаций δG кондактанса и средней мощности дробового шума $\langle S\rangle$ от длины цепочки для $\alpha = 0.5$. Сплошные линии – расчет с помощью формулы (2), штриховая линия – график функции $\propto L^{-1/2}\ \ln L$, точки получены с помощью численного моделирования методом Монте-Карло

Эта плотность удовлетворяет дробному уравнению:

$$ {}_0\mathsf{D}_L^\alpha\ w_G(y;L,\alpha) - \rho l^{-\alpha}\ \frac{\partial}{\partial y}\left[y^2 w_G(y;L,\alpha)\right] = \\ = \frac{L^{-\alpha}}{y\ \Gamma(1-\alpha)}\delta(y-\rho^{-1}). \qquad (3) $$

На рис. 2a и 3 представлено сравнение полученных распределений с результатами численного моделирования методом Монте-Карло.

В [2] находится скейлинговое поведение в асимптотике $L\to\infty$ для отрицательных моментов сопротивления $\langle R(L)^{-k}\rangle$, где $k = 1,\ 2,\ 3,...$, которое соответствует скейлингу положительных моментов кондактанса $G = 1/R$. Используя асимптотическое выражение для односторонней устойчивой плотности

$$ g^{(\alpha)}(s) \to \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}s^{-1-\alpha}, \quad s\to\infty, $$

и формулу (1), находим для $L \gg l$

$$ \langle G(L)\rangle \propto \rho^{-1}(L/l)^{-\alpha}\ln L, \quad \langle G^k(L)\rangle \propto \rho^{-k}(L/l)^{-\alpha}, $$

что согласуется с вычислениями [2]. Относительные флуктуации кондактанса растут с увеличением длины проволоки:

$$ \delta G(L) = \mathrm{Var}\ G(L)/\langle G(L)\rangle \propto (L/l)^{\alpha/2}/\ln L. $$

Зная моменты, можно вычислить среднюю мощность дробового шума

$$ \langle S\rangle = \frac{2}{3}e|V|\rho^{-1}\ [\rho\langle G\rangle + 2\rho^3\langle G^3\rangle]. $$

На рис. 2b представлено сравнение аналитических результатов (сплошные линии) для среднего значения и относительных флуктуаций кондактанса, а также средней мощности дробового шума с результатами численного моделирования методом Монте-Карло.

Полученные здесь результаты согласуются с недавно полученным в [12] дробно-дифференциальным обобщением известного ДМПК-уравнения [13, 14] на случай фрактального распределения рассеивателей:

$$ l^\alpha \mathsf{D}_L^\alpha P_\alpha(\{x\},L) = \frac{1}{2(\beta N + 2 - \beta)}\times \\ \times\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_k} + \beta P_\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial x_k}\right) + \frac{(L/l)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\ \delta(\{x\}), \quad L\to\infty. $$

$$ \Omega = -\sum_{i=1}^N\sum_{j=i+1}^N \ln|\sinh^2 x_j - \sinh^2 x_i| - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^N \ln|\sinh 2x_i|. $$

Здесь x_j – собственные числа квантовомеханической передаточной матрицы t, N – количество параллельных каналов, $P_\alpha(\{x\},L)$ – N-мерная плотность распределения случайного вектора $(x_1,x_2,\ldots,x_N)$. Параметр $\beta = 1$, если присутствует симметрия относительно обращения времени, и $\beta = 2$, если эта симметрия нарушена.

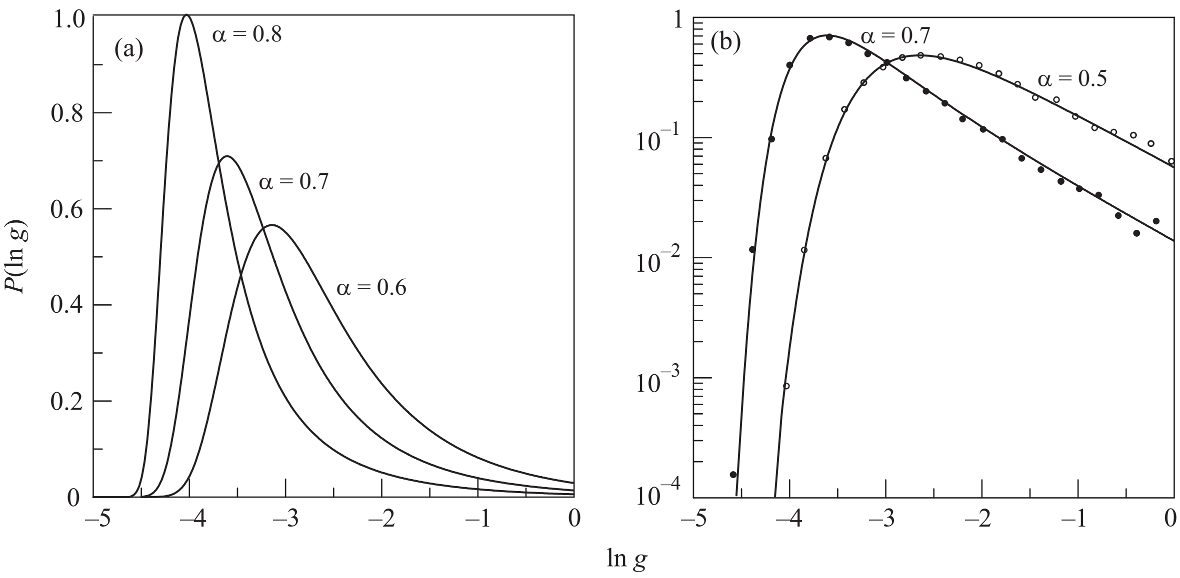

Рис. 3. (a) Плотности распределения $\ln G$ для различных значений α, построенные с помощью (2). (b) Сравнение аналитически рассчитанных плотностей $P(\ln g)$ с результатами моделирования методом Монте-Карло (точки)

Используя теорему о связи решения дробно-дифференциального уравнения Фоккера-Планка со стандартным решением [15, 16], приходим к формуле

$$P_\alpha(\{x\}, L) = \frac{L}{l\alpha}\int_0^\infty P_1(\{x\}, \tau) g^{(\alpha)}\left(\frac{L}{l}\tau^{-1/\alpha}\right)\tau^{-1-1/\alpha}d\tau.$$

Распределения $P_1(\{x\}, \tau)$ для различных режимов проводимости и различного числа мод могут быть найдены в работах [17–19].

Аналогичную формулу получаем для распределения кондактанса:

$$w_G(y; L, \alpha) = \frac{L}{l\alpha}\int_0^\infty w_G(y; \tau, 1) g^{(\alpha)}\left(\frac{L}{l}\tau^{-1/\alpha}\right)\tau^{-1-1/\alpha}d\tau. \quad (4)$$

В случае последовательного некогерентного туннелирования через регулярную (нефрактальную) цепочку туннельных барьеров имеем $w_G(y; \tau, 1) = \rho^{-1}y^{-2}\delta(\tau - 1/y\rho)$. Подставляя эту функцию в последнюю формулу, приходим к выражению (2).

Рассматриваемая цепочка туннельных барьеров с самоподобным пространственным распределением является простейшим примером мезоскопической системы с фрактальным беспорядком. Результаты согласуются с дробным аналогом ДМПК-уравнения, которое как и стандартное уравнение применимо только в случае слабого рассеяния. Авторы [20, 21] получили обобщение ДМПК-подхода для сильной локализации в предположении, что малые изменения масштабных параметров системы (например, длины) приводят к малым изменениям параметров передачи x_i. Однако, это предположение не всегда выполняется для сильной локализации. Известно [22], например, что для квантового туннелирования небольшие флуктуации параметров потенциальных барьеров могут приводить к гигантским флуктуациям туннелирования. Эффект проявляется и на макроскопических масштабах, например, в явлении дисперсионного переноса в неупорядоченных полупроводниках. Если предположить, что флуктуации параметров передачи являются самоподобными, то можно избежать разложения по малому параметру и обобщить ДМПК-метод для случая сильной локализации и более высоких размерностей в рамках дробно-дифференциального подхода.

Автор признателен Российскому фонду фундаментальных исследований (гранты # 10-01-00608 и 09-01-00815) за финансовую поддержку.

---

1. F. Falceto and V. A. Gopar Europhysics Letters **92**, 57014 (2010).
2. C. W. J. Beenakker, C. W. Groth, and A. R. Akhmerov, Phys. Rev. B **79**, 024204 (2009).
3. H. Kohno and H. Yoshida, Phys. Rev. E **70**, 062601 (2004).
4. М. А. Рувинский, Б. М. Рувинский, Физика и техника полупроводников, **39**, 247 (2005).
5. P. Barthelemy, J. Bertolotti, and D. S Wiersma, Nature **453**, 495 (2008).

6. E. Barkai, V. Fleurov, and J. Klafter, Phys. Rev. E **61**, 1164 (2000).
7. В. В. Учайкин, Успехи физических наук **173**, 847 (2003).
8. В. В. Учайкин, Журнал технической физики **74**, №7, 123 (2004).
9. V. V. Uchaikin and R. T. Sibatov, Mathematics and Statistics Research Report, 4/04, NG1 4BU, Nottingham, 1-14, (2004).
10. V. Kolokoltsov, V. Korolev, and V. Uchaikin, Mathematics and Statistics Research Report, 23/00, Nottingham (2000).
11. V. V. Uchaikin and V. M. Zolotarev, Chance and Stability, Stable Distributions and their Applications, Utrecht, The Netherlands: VSP (1999).
12. R. T. Sibatov, Preprint, www.arxiv.org (2011).
13. О. Н. Дорохов, Письма в ЖЭТФ **36**, 259 (1982).
14. P. A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar, Annals of Physics **181**, 290 (1988).
15. В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Ульяновск: Артишок, 2008.
16. Р. Т. Сибатов, В. В. Учайкин, Успехи физических наук **179**, 1079 (2009).
17. M. Cassele, Phys. Rev. Letters **74**, 2776 (1995).
18. C. W. J. Beenakker, Rev. of Modern Physics **69**, 731 (1997).
19. V. A. Gopar, K. A. Muttalib, Phys. Rev. B **66**, 174204-1-6 (2002).
20. K. A. Muttalib and J. R. Klauder, Phys. Rev. Lett. **82**, 4272 (1999).
21. K. A. Muttalib and V. A. Gopar, Phys. Rev. B **66**, 115318 (2002).
22. F. Bardou, Europhys. Lett. **39**, 239 (1997).