Письма в ЖЭТФ, том 53, вып. 1, стр. 59 - 62 10 января 1991 г.

БОЛЬШИЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОРБИТЫ ГРУППЫ ВИРАСОРО

А.Горский, Б.Рой[1] *К.Селиванов*

Институт теоретической и экспериментальной физики
117259, Москва
[1]*Международный центр теоретической физики, Триест, Италия*

Поступила в редакцию 6 декабря 1990 г.

Классификация орбит группы Вирасоро рассмотрена в термтинах орбит калибровочной группы. Показано, что специальным орбитам группы Вирасоро соответствуют орбиты калибровочной группы с нетривиальным числом намоток.

В течении нескольких последних лет предпринимались попытки геометрического подхода к построению и классификации конформных теорий [1-3]. Было показано, что существует соответствие между некоторыми типами конформных теорий и определенными типами коприсоединенных орбит группы Вирасоро, но полная программа еще далека от завершения. В частности существенное препятствие заключается в том, что орбиты типа $\hat{\mathrm{diff}}S^1/SL^{(n)}(2,R)$; $\hat{\mathrm{diff}}S^1/T_{n,\Delta}$; $\hat{\mathrm{diff}}S^1/T_{n,\pm}$ [1] не поддаются квантованию стандартными методами.

Проблема классификации коприсоединенных орбит Вирасоро была решена в разных подходах и в разное время независимо несколькими авторами ([4], см. также [1,5]). Изложим необходимые нам результаты. Тип орбиты удобно описывать в терминах ее стационарной подгруппы (стабилизатора). Существует четыре различных типа стабилизаторов орбит Вирасоро: S^1, $SL^{(n)}(2,R)$ (здесь индекс n указывает способ вложения $SL(2,R)$ в группу Вирасоро), $T_{n,\Delta}$ - однопараметрическая подгруппа группы Вирасоро, генерируемая векторным полем с простыми нулями (n - число нулей, Δ - непрерывный инвариант связанный с монодромией), $T_{n,\pm}$ - однопараметрическая подгруппа группы Вирасоро, генерируемая векторным полем с двойными нулями (n - число нулей, $\pm$ - дискретный инвариант, связанный с ориентацией).

Здесь мы покажем, каким образом специальные орбиты Вирасоро - орбиты типа $\hat{\mathrm{diff}}S^1/SL^{(n)}(2,R)$; $\hat{\mathrm{diff}}S^1/T_{n,\Delta}$; $\hat{\mathrm{diff}}S^1/T_{n,\pm}$ возникают при гамильтоновой редукции [6] с орбит коприсоединенного действия $SL(2,R)$ калибровочной группы (центрально расширенной группы петель $L\hat{S}L(2,R)$).

Как хорошо известно [7], орбиты коприсоединенного действия калибровочной группы $L\hat{G}$ классифицируются матрицей монодромии $M \in G$, т.е. на орбите, отвечающей данной матрице лежат те и только те элементы $J(x)$ из алгебры Каца - Муди группы $L\hat{G}$, которые можно представить в виде

$$J = k\partial g(x)g^{-1}(x), \tag{1}$$

где k - уровень алгебры Каца - Муди, $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $x \in S_1$, $g(x)$ функция на S^1 со значениями в G такая, что

$$g(2\pi) = g(0) \quad M. \tag{2}$$

Матрица M определена по модулю сопряжений в G, и таким образом, орбиты коприсоединенного действия группы находятся во взаимнооднозначном соответствии с классами сопряженных элементов в группе G. В том случае, когда в группе существуют нестягиваемые петли, описанная классификация орбит справедлива лишь для "большой калибровочной группы, включающей как гомотопные, так и негомотопные единице элементы. Если же мы ограничимся

"малой" калибровочной группой (связной единице компонентой $\hat{LG}$), то матрице монодромии из данного класса сопряженных элементов будет отвечать серия орбит, отличающихся одна от другой калибровочным преобразованием с нетривиальным числом намоток.

Для $SL(2,R)$ классы сопряженных элементов перечисляются матрицами

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \cos\alpha + \sigma_2 \sin\alpha, && 0 \le \alpha < \pi \\ &\text{b)}\ \pm(1 + (\sigma_1 \pm \sigma_2)\alpha), && \alpha > 0 \\ &\text{c)}\ \pm(\mathrm{ch}\alpha + \sigma_1 \mathrm{sh}\alpha), && \alpha > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а большое калибровочное преобразование с числом намоток, равным n определяеся матрицей

$$g_n(x) = \exp\{n\sigma_2 x\} = \cos nx + \sigma_2 \sin nx. \tag{4}$$

Заметим, что при калибровочном действии с произвольной матрицей $g(x)$ матрица монодромии преобразуется по правилу

$$M \to g(2\pi) M g^{-1}(0) \tag{5}$$

поэтому вместо классов (3) мы можем рассматривать только классы

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \cos\alpha + \sigma_2 \sin\alpha, && 0 \le \alpha < \pi/2 \\ &\text{b)}\ 1 + (\sigma_1 \pm \sigma_2)\alpha), && \alpha > 0 \\ &\text{c)}\ \mathrm{ch}\alpha + \sigma_1 \mathrm{sh}\alpha), && \alpha > 0 \end{aligned} \tag{3'}$$

а в набор больших калибровочных преобразований включить матрицы вида (4) с полуцелым n.

Матрицам монодромии вида (3′) при нулевом числе намоток отвечают орбиты проходящие через постоянный на S^1 элемент алгебры $\hat{LSL}(2,R)$. Эти постоянные элементы, имеющие, соответственно, вид

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \frac{k\alpha}{2\pi}\sigma_2, && 0 \le \alpha < \pi \\ &\text{b)}\ \frac{k\alpha}{2\pi}(\sigma_1 \pm \sigma_2), && \alpha > 0 \\ &\text{c)}\ \frac{k\alpha}{2\pi}\sigma_1, && \alpha > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

выберем в качестве представителей. Представители для орбит с числом намоток $n = \frac{m}{2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ (\frac{k\alpha}{2\pi} + \frac{km}{2})\sigma_2 \\ &\text{b)}\ (\pm\frac{k\alpha}{2\pi} + \frac{km}{2})\sigma_2 + \frac{k\alpha}{2\pi}\sigma_1 \cos mx + \frac{k\alpha}{2\pi}\sigma_3 \sin mx \\ &\text{c)}\ \frac{km}{2}\sigma_2 + \frac{k\alpha}{2\pi}\sigma_1 \cos mx + \frac{k\alpha}{2\pi}\sigma_3 \sin mx. \end{aligned} \tag{7}$$

Прежде, чем проводить редукцию на орбиты Вирасоро, отметим еще, что стационарные подгруппы группы $LS\hat{L}(2,R)$ для представителей (7) генерируются следующими элементами алгебры $LS\hat{L}(2,R)$

$$\begin{gathered}\text{a)}\ \sigma_2, \quad \alpha \neq 0 \\ \text{a}')\ \sigma_2,\ \ \sigma_1 \cos mx + \sigma_2 \sin mx,\ \ \sigma_3 \cos mx - \sigma_1 \sin mx, \quad \alpha = 0 \\ \text{b)}\ \pm\sigma_2 + \sigma_1 \cos mx + \sigma_3 \sin mx \\ \text{c)}\ \sigma_1 \cos mx + \sigma_3 \sin mx.\end{gathered} \tag{8}$$

Для того, чтобы определить орбиты Вирасоро, отвечающие калибровочным орбитам с представителями (7) при гамильтоновой редукции [6], необходимо нетривиальным калибровочным преобразованием из связной единице компоненты $LS\hat{L}(2,R)$ привести представители к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Коприсоединенному действию калибровочной группы $LS\hat{L}(2,R)$, сохраняющему форму (9) отвечает коприсоединенное действие группы Вирасоро на нижнетреугольный элемент, который, таким образом, может рассматриваться как представитель на орбите Вирасоро. Верхнетреугольный элемент матрицы из алгебры $LS\hat{L}(2,R)$, определяющей инфинитезимальное сохраняющее форму (9) калибровочное преобразование, играет роль векторного поля на S^1, определяющего инфинитезимальное коприсоединенное действие группы Вирасоро на $u(x)$.

Как уже говорилось, типы орбит Вирасоро естественно описываются в терминах соответствующих стабилизаторов, так что логика наших действий будет такова: во-первых, мы находим калибровочное преобразование, приводящее представители (7) к виду (9), во-вторых, действуем этим преобразованием на элементы стабилизаторов (8) после чего их верхнетреугольная компонента, будучи стабилизатором при коприсоединенном вирасоровском действии, определяет орбиту Вирасоро.

Для калибровочных орбит типа a) при $\alpha \neq 0$ вирасоровский стабилизатор генерируется однопараметрической подалгеброй алгебры Вирасоро, состоящей из постоянных на S^1 векторных полей, так что соответствующая орбита Вирасоро относится к типу $\overline{\mathrm{diff}}S^1/S^1$ причем, как несложно убедиться, нормальной формой представителя является постоянный отрицательный два-дифференциал.

Для калибровочных орбит типа a) при $\alpha = 0$, $m \neq 0$ вирасоровский стабилизатор генерируется трехпараметрической подалгеброй алгебры Вирасоро, состоящей из векторных полей вида 1, $\sin mx$, $\cos mx$, так что соответствующая орбита Вирасоро относится к типу $\overline{\mathrm{diff}}S^1/SL^{(m)}(2,R)$.

Для калибровочных орбит типа b) вирасоровский стабилизатор генерируется векторным полем

$$\frac{1 \pm \cos mx}{\frac{km}{2} + \frac{k\alpha}{2\pi}(1 \pm \cos mx)}, \quad m > 0. \tag{10}$$

По классификации [1] такое векторное поле относится к типу $J_{n,\pm}$ и, таким образом, орбиты типа в) редуцируются к орбитам $\overline{\mathrm{diff}}S^1/T_{n,\pm}$.

Для калибровочных типа c) вирасоровский стабилизатор генерируется векторным полем

$$\frac{\mathrm{sh}\mu + \mathrm{ch}\mu \cos mx}{\frac{km}{2} + \frac{k\alpha}{2\pi}\mathrm{sh}\mu + \frac{k\alpha}{2\pi}\mathrm{ch}\mu \cos mx}, \tag{11}$$

где $m > 0$ и параметр выбран так, что $\frac{k\alpha}{2\pi}\mathrm{sh}\mu + \frac{km}{2} > \frac{k\alpha}{2\pi}\mathrm{ch}\mu$. По классификации [1] соответствующая орбита относится к типу $\overline{\mathrm{diff}}S^1/T_{n\Delta}$, $\Delta = k\alpha$.

В заключение наметим пути дальнейших исследований. Во-первых, возможно аналогичное рассмотрение симплектических листов W_n алгебр, которые являются аналогами вирасоровских орбит при гамильтоновой редукции с коприсоединенных орбит $L\hat{S}L(N,R)$ [6]. Во-вторых, интересно было бы проследить, как возникает классификация орбит Вирасоро при редукции из трехмерной теории с лагранжианом Черна - Саймонса на должным образом подобранном многообразии; нетривиальному числу намоток при этом отвечали бы вихри. Наконец, самым интересным представляется проквантовать специальные орбиты Вирасоро в подходе квантовой гамильтоновой редукции.

Нам приятно поблагодарить А.Лосева, А.Рослого и В.Фока за весьма полезные обсуждения.

Литература

1. *Witten E.* Comm. Math. Phys., 1988, **114**, 1.
2. *Алексеев А., Шаташвили С.* Nucl. Phys., 1989, B323, 719.
3. *Алексеев А., Шаташвили С.* Comm. Math. Phys., 1990, **128**, 192.
4. *Kuiper N.H.* Michigan Math. J., 1953, 2, 3, 95; *Лазуткин В.Ф., Панкратова Т.Ф.* Функциональный анализ и его приложения. 1975, 9, 41; *Кириллов А.А.* Lect Notes in Math., 1982, 970, 101; *Segal G.* Comm. Math. Phys., 1981, 80, 301.
5. *Овсиенко В.Ю., Хесин Б.А.* Функциональный анализ и его приложения, 1990, **24**, 38.
6. *Дринфельд В.Г., Соколов В.В.* Итоги науки и техники СССР. Современные проблемы математики, 1984, **24**, 81.
7. *Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А.* ДАН СССР, 1980, **251**, 1310.