

# Модуляционная неустойчивость длинных внутренних волн умеренной амплитуды в стратифицированном горизонтально неоднородном океане

Т. Г. Талипова<sup>+1)</sup>, Е. Н. Пелиновский<sup>+\*</sup>, К. Хариф<sup>-</sup>

<sup>+</sup> Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

<sup>\*</sup> НИУ Высшая школа экономики, Нижегородский филиал, Нижний Новгород, Россия

<sup>-</sup> Институт неравновесных физических явлений, Марсель, Франция

Поступила в редакцию 11 мая 2011 г.

После переработки 20 июня 2011 г.

Показывается, что известный эффект модуляционной неустойчивости волновых пакетов может реализоваться для длинных внутренних волн умеренной амплитуды в стратифицированном горизонтально неоднородном океане при определенных условиях на вертикальную структуру поля плотности и течений. Приведены результаты численных расчетов трансформации волновых пакетов в ряде районов Мирового океана, показывающие возможность образования волн-убийц в толще океана.

Эффект модуляционной неустойчивости, хорошо известный для нелинейных волновых пакетов в дисперсионных средах (см., например, [1]), сейчас активно используется для объяснения феномена волн-убийц, возникающих на поверхности глубокого океана [2–6]. На мелководье, в частности, при распространении однонаправленных волновых пакетов модуляционная неустойчивость отсутствует [7]. Наиболее просто это показывается при выводе нелинейного уравнения Шредингера из уравнения Кортевега–де Вриза, являющегося типичной моделью длинных волн на мелкой воде [8]. В стратифицированном океане слабо нелинейные длинные внутренние волны описываются также уравнением Кортевега–де Вриза [9], так что очевидно, что такие волны являются модуляционно устойчивыми. Между тем при определенных условиях на вертикальную стратификацию по плотности и течению коэффициент квадратичной нелинейности в уравнении Кортевега–де Вриза становится аномально малым. Поэтому необходимо учитывать следующие члены в асимптотических разложениях, приводящие к уравнению Гарднера [9–13]. В простейшей модели двухслойной жидкости, популярной в океанологии, нелинейное уравнение Шредингера, выводимое из уравнения Гарднера, остается дефокусирующим, так что для этой модели стратификации модуляционная неустойчивость пакетов длинных внутренних волн невозможна (в двумерном случае волновой пакет оказывается неустойчивым [12]). Между тем в случае многослойной или непрерывной

стратификации поля плотности и течения в уравнении Гарднера коэффициент кубической нелинейности может быть положительным [13–15]. Это приводит при определенных условиях к фокусирующему нелинейному уравнению Шредингера [16]. Таким образом, длинные внутренние волны умеренной амплитуды могут быть модуляционно неустойчивыми, фокусируясь в аномально большие волновые пакеты. За такими волнами закрепился термин “внутренние волны-убийцы” [17, 18]. Эффекты модуляционной неустойчивости и возникновения бризеров обнаружены также в рамках полно нелинейных уравнений Эйлера [19, 20]. В применении к реальным условиям стратифицированного океана необходимо учитывать еще и переменность глубины бассейна, и горизонтальную неоднородность поля плотности. Возникновение модуляционной неустойчивости длинных внутренних волн в неоднородном океане и является предметом настоящего исследования.

Динамика длинных внутренних волн умеренной амплитуды в горизонтально неоднородном океане (одномодовое распространение) достаточно хорошо описывается нелинейным эволюционным уравнением Гарднера с переменными коэффициентами [9, 13, 14, 21, 22]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left[ \frac{\alpha(x)Q(x)}{c^2(x)} \xi + \frac{\alpha_1(x)Q^2(x)}{c^2(x)} \xi^2 \right] \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\beta(x)}{c^4(x)} \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} = 0, \quad (1)$$

где  $x$  есть координата вдоль пути распространения волны,  $s$  есть время в сопровождающей системе отсчета,  $s = \int dx/c(x) - t$ ,  $\xi = \eta/Q(x)$ ,  $\eta$  – вертикальное

<sup>1)</sup> e-mail: tata@hydro.appl.sci-nnov.ru

смещение изопикны в максимуме моды,  $Q(x)$  – коэффициент линейного усиления (находимый из естественного условия сохранения потока энергии в неоднородной среде). Скорость распространения волны,  $c(x)$ , и вертикальная модовая структура,  $\Phi(z)$ , находятся из решения задачи Штурма–Лиувилля (см., например, [9]):

$$\frac{d}{dz} \left\{ [c - U(z)]^2 \frac{d\Phi}{dz} \right\} + N^2(z)\Phi = 0. \quad (2)$$

с нулевыми граничными условиями на поверхности и дне. Здесь  $N(z) = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}$  – частота плавучести, определяемая через вертикальное распределение плотности воды  $\rho(z)$ , и  $U(z)$  – устойчивое сдвиговое течение. Коэффициенты квадратичной нелинейности,  $\alpha(x)$ , кубической нелинейности,  $\alpha_1(x)$ , и дисперсии,  $\beta(x)$ , вычисляются по заданному вертикальному распределению (многослойного или непрерывного поля плотности) в виде [10, 11, 13]

$$\alpha = \frac{3 \int_0^H (c - U)^2 (d\Phi/dz)^3 dz}{2 \int_0^H (c - U) (d\Phi/dz)^2 dz}, \quad (3)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\int_0^H (c - U)^2 \Phi^2 dz}{\int_0^H (c - U) (d\Phi/dz)^2 dz},$$

$$\alpha_1 = \frac{3 \int_0^H dz (c - U)^2 [3(dT/dz) - 2(d\Phi/dz)^2] (d\Phi/dz)^2}{2 \int_0^H (c - U) (d\Phi/dz)^2 dz} - \frac{3 \int_0^H dz \alpha^2 (d\Phi/dz)^2 - \Pi}{2 \int_0^H (c - U) (d\Phi/dz)^2 dz}, \quad (4)$$

$$\Pi = \alpha(c - U)[5(d\Phi/dz)^2 - 4dT/dz]d\Phi/dz.$$

Здесь функция  $T(z)$  есть нелинейная поправка к модальной функции  $\Phi$ , определяемая уравнением

$$\frac{d}{dz} \left[ (c - U)^2 \frac{dT}{dz} \right] + N^2(z)T = -\alpha \frac{d}{dz} \left[ (c - U) \frac{d\Phi}{dz} \right] + \frac{3}{2} \frac{d}{dz} \left[ (c - U)^2 \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 \right] \quad (5)$$

с нулевыми граничными и нормировочным ( $T(z_{\max}) = 0$ ) условиями (где  $z_{\max}$  – координата точки максимума модальной функции  $\Phi(z_{\max}) = 1$ ).

Важно подчеркнуть, что коэффициент дисперсии всегда положителен, а коэффициенты квадратичной и кубической нелинейности могут иметь любой знак, в том числе обращаться в нуль. Как известно, знак коэффициента квадратичной нелинейности в рамках уравнения Кортевега–де Вриза, получаемого из (1)

для волн малой амплитуды, определяет полярность солитонов, но не влияет на нелинейную динамику волн. В то же время знак коэффициента кубической нелинейности является принципиальным. Так, в случае отрицательности кубической нелинейности солитоны большой амплитуды ограничены по амплитуде. Ассоциированная с этим уравнением система Захарова–Шабата решена в [23]. В случае же положительности кубической нелинейности имеется два семейства солитонов, могут распространяться бризеры. Соответствующая обратная задача рассмотрена в [24]. Переменность коэффициентов разрушает интегрируемость уравнения (1), за исключением некоторых частных случаев [25, 26], для которых нам не удалось найти практического применения. Динамика нелинейных внутренних волн, в особенности солитонов, в рамках уравнения (1) активно исследуется численно для ряда районов Мирового океана. Созданы карты распределения коэффициентов уравнения (1) в Мировом океане [9, 14, 15]. Здесь мы не будем обсуждать специфические океанологические применения уравнения Гарднера.

О модуляционной неустойчивости длинных внутренних волн можно судить по виду нелинейного уравнения Шредингера, легко выводимого из уравнения Кортевега–де Вриза и Гарднера с постоянными коэффициентами [8, 16]. Для уравнения Гарднера (1) с “замороженными” коэффициентами соответствующее нелинейное уравнение Шредингера имеет вид

$$i \frac{\partial A}{\partial x} = 3 \frac{\beta \omega}{c^4} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \omega \delta |A|^2 A, \quad \delta = \frac{\alpha_1 Q^2}{c^2} - \frac{\alpha^2 Q^2}{6\beta \omega^2}, \quad (6)$$

где  $A$  есть амплитуда основной гармоники,  $\tau = x/c_{gr} - t$ , и  $c_{gr} = c - 3\beta\omega^2/c^2$ . Фокусирующим это уравнение будет при  $\delta > 0$ , что возможно, только если коэффициент кубического нелинейного члена  $\alpha_1$  в уравнении Гарднера (1) положителен. Как уже говорилось, в наиболее распространенной двухслойной модели океана этот коэффициент отрицателен. Поэтому модуляционная неустойчивость внутренних волн в этой модели невозможна. Между тем исследования показывают, что на океанических шельфах стратификация вод бывает такова, что условие  $\alpha_1 > 0$  выполняется достаточно часто [9, 13, 14, 27]. Таким образом, на самом деле модуляционная неустойчивость в океане возможна. Из условия  $\delta > 0$  следует также, что волновая группа должна быть достаточно высокочастотной:

$$\omega > \omega_{cr} = \frac{|\alpha|c}{\sqrt{6\alpha_1\beta}}. \quad (7)$$

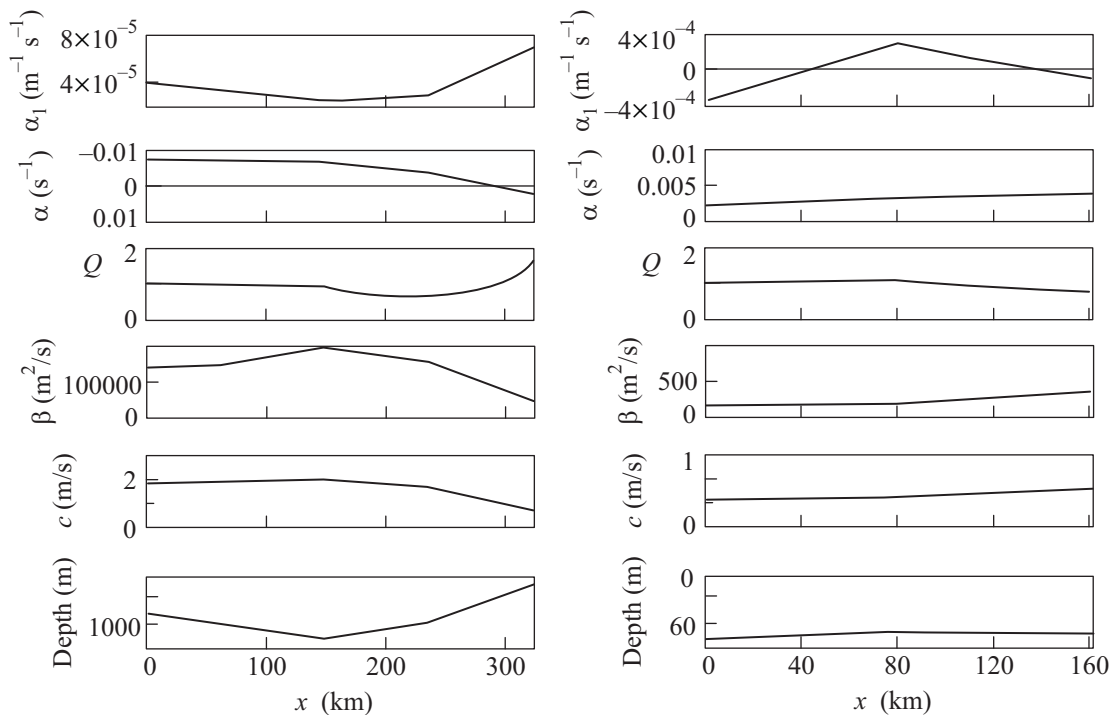


Рис. 1. Коэффициенты уравнения Гарднера: (а) для Южно-Китайского моря; (б) для Балтийского моря

Характер проявления модуляционной неустойчивости демонстрируется ниже расчетами трансформации внутренних волн в рамках (1) для двух районов Мирового океана: Южно-Китайское и Балтийское моря. Координаты начала и конца трассы в Южно-Китайском море:  $15.1^\circ N, 111^\circ E$  и  $17.8^\circ N, 109.9^\circ E$  и в Балтийском море:  $60^\circ N, 20.4^\circ E$  и  $58.6^\circ N, 18.6^\circ E$ . Рассчитанные коэффициенты уравнения Гарднера показаны на рис. 1. Видно, что коэффициент кубической нелинейности,  $\alpha_1$ , положителен для всей трассы распространения волн в Южно-Китайском море и два раза меняет знак вдоль трассы в Балтийском море, но остается положительным на расстоянии около 100 км. Критическая частота (7) возникновения модуляционной неустойчивости для Южно-Китайского моря показана на рис. 2. Для Балтики она показана только на том участке трассы, где  $\alpha_1$  положителен. Для моделирования несущая волна выбиралась с характерным периодом порядка 10 мин, то есть  $\omega = 0.01c^{-1}$ , что заведомо больше критической частоты везде в Южно-Китайском море и на большом участке трассы в Балтийском море.

Для численного моделирования группа внутренних волн в Южно-Китайском море задавалась на временном интервале 12 ч с гауссовой огибающей амплитудой 30 м (что характерно для волн в этом регионе), шириной 2.8 ч. Результаты моделирования

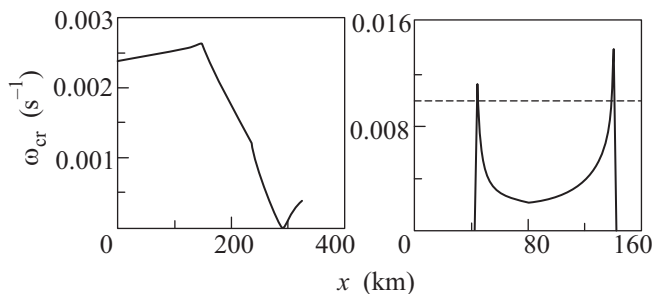


Рис. 2. Критическая частота вдоль трассы: (а) для Южно-Китайского моря; (б) для Балтийского моря; штриховой линией показана частота несущей волны

представлены на рис. 3. Как видно, группа волн достаточно долго сохраняет форму, близкую к гауссову пугу (129 км). Затем от нее отделяется группа на второй гармонике, генерируемая из-за нелинейности. В дальнейшем основная группа становится почти демодулированной (на расстоянии около 291 км). Это связано, на наш взгляд, в первую очередь с падением коэффициента линейного усиления  $Q$  и, соответственно, амплитуды волн почти в два раза. В таких условиях нелинейные кубические эффекты становятся несущественными, а квадратичная нелинейность всегда приводит к демодуляции. К концу трассы происходит рост коэффициентов  $Q$  и  $\alpha_1$  и развивается

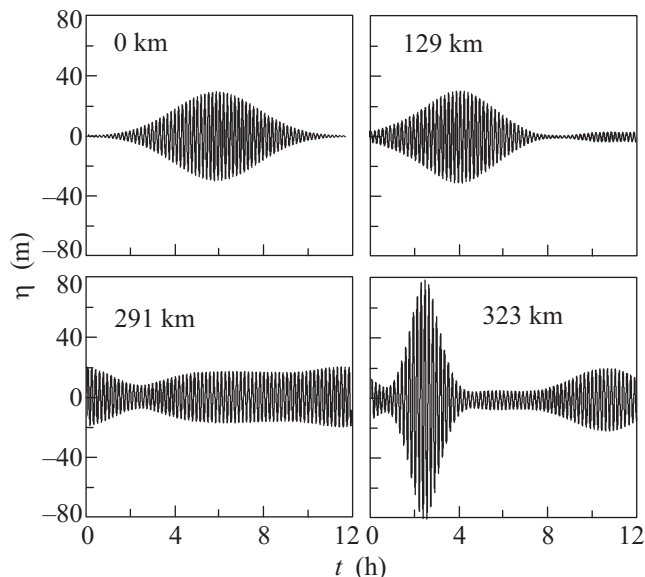


Рис. 3. Трансформация группы внутренних волн по трассе в Южно-Китайском море

модуляционная неустойчивость группы внутренних волн, формируя узкий волновой пакет.

Влияние кубической нелинейности на форму группы волн в этом регионе очевидно из сравнения результатов моделирования с учетом кубической нелинейности и без нее (рис. 4), то есть в рамках

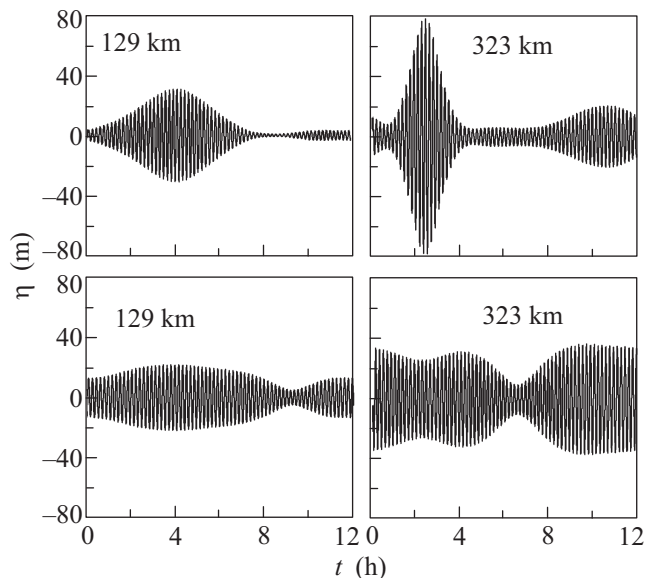


Рис. 4. Сравнение форм группы волн при распространении в Южно-Китайском море с учетом кубической нелинейности и без нее (верхние и нижние панели соответственно)

модели Кортевега–де Вриза. Ясно видно, что кубическая нелинейность, в отличие от квадратичной

нелинейности, приводит к генерации энергетических волновых пакетов.

Балтийское море является непривливым, и параметры внутренних волн в нем отличаются от вышерассмотренных. Поэтому временной период для моделирования трансформации группы внутренних волн в Балтийском море выбирался равным 3 ч. Амплитуда группы 6 м, ее длительность 2.8 ч. Результаты моделирования показаны на рис. 5. От нача-

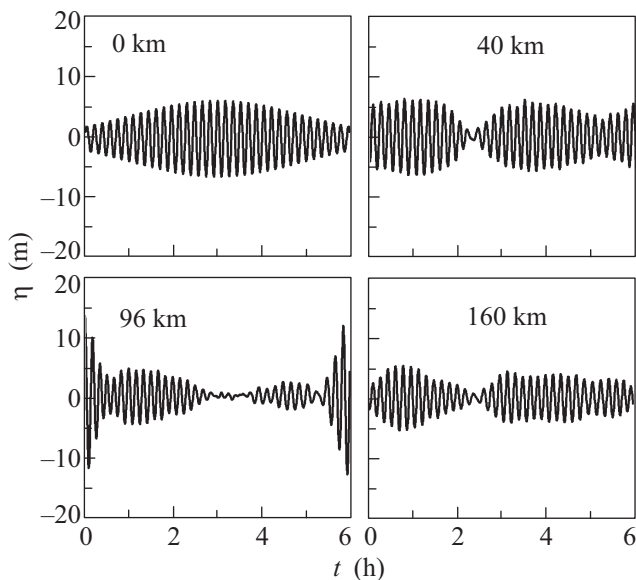


Рис. 5. Трансформация группы внутренних волн по трассе в Балтийском море

ла трассы до отметки 40 км кубический коэффициент уравнения Гарднера отрицателен, так что происходит дефокусировка волновой группы. Далее идет участок фокусировки волнового пакета. На отметке 96 км, где положительный коэффициент кубической нелинейности максимален, происходит фокусирование энергетической группы с амплитудой 13 м. Следует отметить, что коэффициент линейного усиления  $Q$  до этой точки практически не меняется от начального значения “единица”, так что рост амплитуды группы волн связан только с действием нелинейности. После того как группа волн выходит из зоны положительного значения кубического коэффициента, она снова дефокусируется (160 км).

Итак, как показывают расчеты, пакеты внутренних волн могут фокусироваться на мелководье, что приводит к появлению волн большой амплитуды. Для оценки действия модуляционной неустойчивости можно найти из нелинейного уравнения Шредингера

расстояние  $L_{inst}$ , на котором развивается модуляционная неустойчивость,

$$L_{inst} = \frac{2\pi}{\omega\delta A^2} \frac{2\pi c^2}{\omega\alpha_1 Q^2 A^2}, \quad (8)$$

где коэффициент кубической нелинейности в уравнении Шредингера (6) заменен на коэффициент кубической нелинейности в уравнении Гарднера (1), что занижает величину оценки. Тогда для стартовой точки по трассе в Южно-Китайском море для выбранной группы эта величина составит 60 км, для точки 129 км длина неустойчивости составляет уже 90 км, а в точке 323 км  $L_{inst} \sim 200$  м. Именно здесь фактически и фокусируется группа волн. Для условий Балтийского моря в зоне фокусировки с координатой около 96 км длина модуляционной неустойчивости составляет 5 км, а на границах зоны положительной кубической нелинейности неограниченно растёт.

Таким образом, сделанные оценки и выполненные расчеты показывают, что эффект модуляционной неустойчивости проявляется в стратифицированном океане и ведет к появлению аномально больших “внутренних волн-убийц”.

Настоящая работа выполнена при поддержке грантов РФФИ # 09-05-00204, 11-05-00216, а также европейского проекта FP-7 “Extreme seas”. Авторы благодарны Е. Бацыной за помощь в приготовлении статьи в LaTeX.

1. V. E. Zakharov and, L. A. Ostrovsky, *Physica D* **238**, 540 (2009).
2. А. А. Куркин, Е. Н. Пелиновский, *Волны-убийцы*, Нижний Новгород: НГТУ, 2004.
3. А. И. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Pis'ma v ZETF* **81**, 318 (2005).
4. А. И. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Pis'ma v ZETF* **88**, 356 (2008).
5. Ch. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Ocean*. Springer, 2009.
6. В. П. Рубан, *ЖЭТФ* **137**, 529 (2010).
7. E. Kit, L. Shemer, E. Pelinovsky et al., *J. Waterway,*

- Port, Coastal Ocean Eng.* **126**, 5 (2000).
8. V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, *Physica D* **18**, 455 (1986).
9. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and T. Talipova, *Survey in Geophysics* **28**, 273 (2007).
10. Е. Н. Пелиновский, О. Е. Полухина, К. Лэмб, *Океанология* **40**, 805 (2000).
11. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and O. Poloukhina, *Nonlinear Processes in Geophysics* **9**, 221 (2002).
12. А. В. Порубов, *ЖТФ* **75**, 48 (2005).
13. Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, К. Ламб и др., *ДАН*, **364**, 824 (1999).
14. Е. Н. Пелиновский, Н. В. Полухин, Т. Г. Талипова, *Моделирование характеристик внутренних волн в Арктике*, В кн.: *Поверхностные и внутренние волны в арктических морях* (под ред. Лавренова И. и Морозова Е.), Ст.-Петербург: Гидрометеиздат, 2002.
15. Н. В. Полухин, Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, И. В. Лавренов, *Океанология* **43**, 356 (2003).
16. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, and T. Talipova, *Physica D* **159**, 35 (2001).
17. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova et al., *Studied Applied Mathematics* **114**, 189 (2005).
18. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova, and A. Sergeeva, *European Physical Journal Special Topics* **185**, 195 (2010).
19. K. Lamb, O. Polukhina, T. Talipova et al., *A. Physical Rev. E* **75**, 046306 (2007).
20. B. Sutherland, *Internal Gravity Waves*, Cambridge University Press, 2010.
21. R. J. Small and R. Ph. Hornby, *Ocean Modelling* **8**, 395 (2005).
22. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Chaos* **12**, 1070 (2002).
23. R. Grimshaw, A. Slunyaev, and E. Pelinovsky, *Chaos*, **20**, 013102 (2010).
24. M. A. Abdou, *Applied Mathematics* **1**, 307 (2010).
25. J. Li, T. Xu, X-H. Meng et al., *J. Math Anal. Appl.* **336**, 1443 (2007).
26. X-G. Xu, X-H. Meng, Y-T. Gao, and X-Y. Wen, *Applied Math and Comp.* **210**, 313 (2009).
27. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova, and O. Kurkina, *Nonlinear Processes in Geophysics* **17**, 633 (2010).