

# Резонансные особенности кондактанса открытых билиардов со спин-орбитальным взаимодействием

Г. Г. Исупова, А. И. Малышев<sup>1)</sup>

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603095 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 10 августа 2011 г.

Работа посвящена изучению транспортных свойств открытой системы – круглого билиарда с подведенными к нему каналами – в присутствии спин-орбитального взаимодействия типа Дрессельхауза и Рашбы. Показано, что его включение вызывает появление на зависимости кондактанса от энергии дополнительных резонансов Фано, ширина которых пропорциональна четвертой степени параметра спин-орбитального взаимодействия.

Как известно, спин-орбитальное взаимодействие (далее СОВ) проявляется в физике твердого тела на фундаментальном уровне, определяя электронные квантовые состояния и приводя к многочисленным транспортным и оптическим эффектам, многие из которых имеют и практический интерес [1, 2].

Об одном из таких новых эффектов и пойдет речь в настоящей работе. В качестве модели рассмотрим открытый квантовый билиард с подведенными к нему входным и выходным каналами с СОВ, присутствующим как внутри билиарда, так и в каналах (см. рис. 1). Хотя конкретный тип СОВ при рассмот-

Что касается СОВ типа Рашбы [4], соответствующие замечания будут сделаны там, где это необходимо.

Прежде чем обращаться к решению основной задачи работы, необходимо в первую очередь определить структуру волновой функции как во внутренней части билиарда, так и в подведенных к нему каналах.

Итак, напомним, что энергетический спектр свободной частицы с волновым вектором  $\mathbf{k}$  с учетом СОВ Дрессельхауза имеет следующий вид:

$$E_\lambda(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \lambda\beta k, \quad (2)$$

а ее волновая функция является спинором:

$$\psi_{\lambda,\mathbf{k}} = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{i\phi(\mathbf{k})} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $\phi(\mathbf{k}) = \arg(k_x - ik_y)$ , а  $\lambda = \pm 1$  – квантовое число, которое соответствует двум поверхностям закона дисперсии, расщепленным СОВ (см., например, [5]). При этом фиксированному значению энергии отвечают состояния, расположенные в плоскости  $(k_x, k_y)$  на окружностях радиусов

$$k_\pm = \frac{1}{\hbar} \left( \sqrt{2mE + \frac{m^2\beta^2}{\hbar^2}} \mp \frac{m\beta}{\hbar} \right), \quad (4)$$

где индексы “±” указывают на знак соответствующего квантового числа  $\lambda$ .

Чтобы охарактеризовать состояния в подведенных к билиарду каналах, рассмотрим двумерный электронный газ в бесконечном канале в присутствии СОВ Дрессельхауза. В этом случае гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \hat{H}_D + V(y), \quad (5)$$

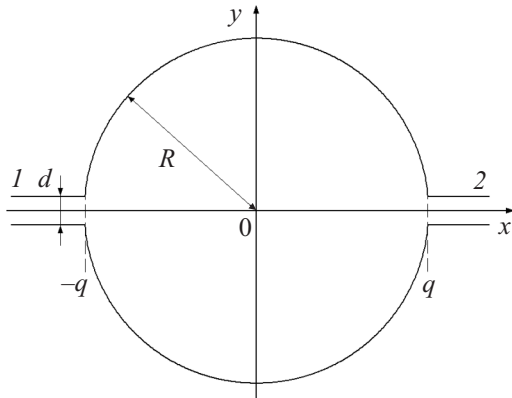


Рис. 1. Открытый билиард с входным (1) и выходным (2) каналами

рении интересующего нас эффекта непринципиален, для конкретики будем придерживаться СОВ Дрессельхауза [3]:

$$\hat{H}_D = \frac{\beta}{\hbar} (\hat{\sigma}_x \hat{p}_x - \hat{\sigma}_y \hat{p}_y). \quad (1)$$

<sup>1)</sup> e-mail: malyshev@phys.unn.ru

где потенциал  $V(y)$  описывает бесконечно глубокую потенциальную яму:

$$V(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } |y| < d/2, \\ \infty & \text{при } |y| \geq d/2. \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку в условиях данной задачи  $p_x$  – интеграл движения, решение стационарного уравнения Шредингера имеет следующую структуру:

$$\psi = \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a(y) \\ b(y) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где функции  $a(y)$  и  $b(y)$  удовлетворяют нулевым граничным условиям на стенках канала. Их удобно искать в виде разложения по собственным функциям поперечных мод в канале без СОВ,  $\varphi_n(y) = \sqrt{2/d} \sin[\pi n(y + d/2)/d]$ , что обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий (см., например, [6]).

Прежде чем перейти к анализу расчетных данных, необходимо определиться с используемыми единицами измерений. Примем безразмерные постоянную Планка и эффективную массу носителей за единицу. Приняв за  $l_0$  единицу длины, определим тем самым единицу энергии,  $e_0 = \hbar^2/ml_0^2$ , и единицу измерения константы СОВ,  $\beta_0 = \hbar^2/ml_0$ . Безразмерные величины далее будем отмечать “волной” над соответствующим символом.

Пример энергетического спектра в бесконечном канале с СОВ Дрессельхауза, нормированного для удобства на энергию первой поперечной моды  $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2md^2$ , представлен на рис. 2. Видно, что он состоит из серии ветвей, расщепленных СОВ. Если рассмотреть нижнюю пару ветвей, то фиксированному значению энергии будет отвечать четыре состояния: волны с векторами  $\pm k_1$  и  $\pm k_2$ , бегущие вправо и влево вдоль канала. При этом пара состояний с волновыми векторами  $k_1$  и  $-k_2$  отличается от пары состояний с векторами  $k_2$  и  $-k_1$  спиновой поляризацией: компоненты спиновой плотности  $\bar{s}_i(x, y) = \hbar/2 \cdot \psi^\dagger \hat{\sigma}_i \psi$  в каждой точке пространства имеют противоположные знаки. Заметим, что  $\bar{s}_y(x, y) \equiv 0$ , поскольку функции  $a(y)$  и  $b(y)$  здесь могут быть выбраны действительными.

При рассмотрении СОВ типа Рашбы решение уравнения Шредингера в канале имеет качественно тот же вид. Однако теперь действительной компоненте спинора  $a(y)$  отвечает чисто мнимая компонента  $b(y)$ , и наоборот, что приводит к занулению  $x$ -компоненты спиновой плотности:  $\bar{s}_x(x, y) \equiv 0$ .

Обратимся теперь непосредственно к расчету волновой функции в структуре с билиардом типа

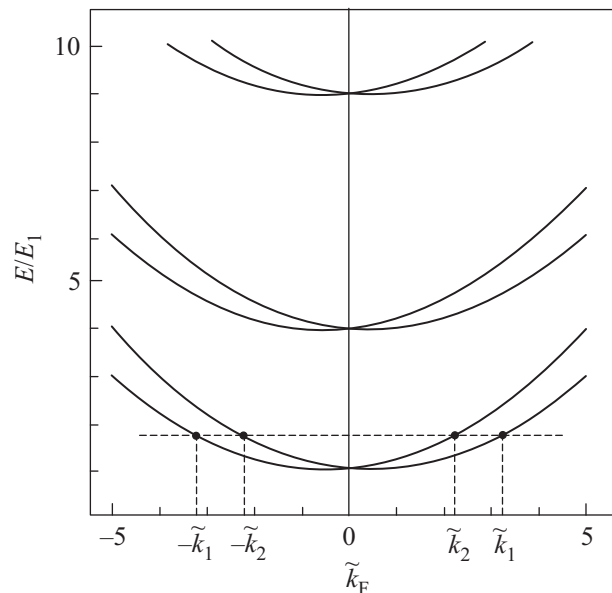


Рис. 2. Фрагмент энергетического спектра электрона в квазиодномерном канале с СОВ Дрессельхауза при  $\tilde{\beta} = 0.5$  и  $\tilde{d} = 1$

“круг” (см. рис. 1). Необходимо решить стационарное уравнение Шредингера с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \hat{H}_D + V(x, y), \quad (8)$$

где  $V(x, y)$  описывает бесконечный скачок потенциала на границе билиарда и стенках примыкающих к нему каналов.

Рассматривая первую пару ветвей спектра (см. рис. 2), будем придерживаться следующей постановки задачи. Пусть в канал 1 (слева) входит волна с волновым вектором  $k_1$ , а в канал 2 (справа) распространяются прошедшие волны с векторами  $k_1$  и  $k_2$  и амплитудами  $c_1$  и  $c_2$  соответственно. В канале 1 при этом распространяются и отраженные волны с волновыми векторами  $-k_1$  и  $-k_2$  и амплитудами  $c_3$  и  $c_4$  соответственно. Таким образом, волновая функция имеет следующий вид:

$$\psi_{\text{out}}^{(1)}(x, y) = \frac{e^{ik_1 x}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_1(y) \\ b_1(y) \end{pmatrix} + c_3 \frac{e^{-ik_1 x}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_3(y) \\ b_3(y) \end{pmatrix} + c_4 \frac{e^{-ik_2 x}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_4(y) \\ b_4(y) \end{pmatrix} \quad (9)$$

во входном канале и

$$\psi_{\text{out}}^{(2)}(x, y) = c_1 \frac{e^{ik_1 x}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_1(y) \\ b_1(y) \end{pmatrix} + c_2 \frac{e^{ik_2 x}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_2(y) \\ b_2(y) \end{pmatrix} \quad (10)$$

в выходном. Здесь  $q = \sqrt{R^2 - d^2/4}$ . Во внутренней области билиарда запишем решение в виде суперпозиции плоских волн:

$$\psi_{in}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{d}} \int_0^{2\pi} \left[ c(\theta) e^{ik_+(x \cos \theta + y \sin \theta)} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\theta} \end{pmatrix} + d(\theta) e^{ik_-(x \cos \theta + y \sin \theta)} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\theta} \end{pmatrix} \right] d\theta, \quad (11)$$

где  $\theta$  – угол в плоскости  $(k_x, k_y)$ , отсчитываемый от положительного направления оси  $k_x$ , а  $k_{\pm}$  определены в (4). Для учета СОВ Рашбы в (11) необходимо  $e^{-i\theta}$  заменить на  $-ie^{i\theta}$ , а  $k_{\pm}$  определяются аналогично.

Сшиваем далее решения (9)–(11) между собой, а также требуем от (11) выполнения нулевых граничных условий на стенках билиарда. Все это может обеспечить применение метода, предложенного в [7] и расширенного в [8] на случай двухкомпонентной волновой функции. В результате появляется возможность анализировать особенности как распределения плотности вероятности, так и компонент спиновой плотности, а также рассчитывать проводимость. Последняя в данном случае может быть найдена по формуле Ландауэра:

$$G = \frac{e^2}{h} (|c_1|^2 + |c_2|^2). \quad (12)$$

Пример зависимости проводимости от  $k_F$ , характеризующего полную энергию – энергию Ферми  $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ , в системе без СОВ, а также с СОВ Дрессельхауза представлен на рис. 3.

Интересным фактом является то, что амплитуда  $c_2$  не дает вклада в расчет проводимости: во всех экспериментах ее абсолютная величина не превышала  $10^{-5}$ . То же самое относится и к амплитуде  $c_3$ . Таким образом, при прохождении и отражении волн в исследуемом билиарде их спиновая поляризация не меняется. Это согласуется с данными работы [9], где сохранение спиновой поляризации было доказано аналитически для произвольного билиарда с СОВ Рашбы. Чрезвычайно важен при этом тот факт, что внутри билиарда в равной мере распространяются волны обеих поляризаций: слагаемые с  $c(\theta)$  и  $d(\theta)$  в (11) имеют один порядок величины.

Несмотря на то что решение вопроса о сходимости использованного метода требует весьма деликатного подхода, сам метод позволяет наблюдать и достаточно тонкие эффекты. К примеру, нетрудно заметить (см. рис. 3), что включение СОВ приводит к появлению на зависимости проводимости от  $k_F$  дополнительных асимметричных резонансов типа Фано

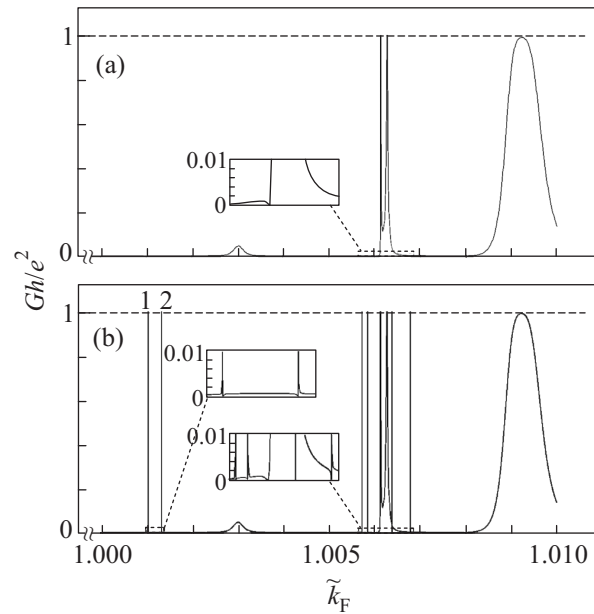


Рис. 3. Фрагмент зависимости кондактанса системы с билиардом от  $k_F$  в системе без СОВ (а), а также с СОВ Дрессельхауза (б) при  $\tilde{\beta} = 0.003$ . Здесь  $\tilde{d} = 1$ ,  $\tilde{R} = 15$ . На вставках показаны увеличенные фрагменты графиков

(см. обзор [10] и ссылки в нем). На рис. 3b нетрудно заметить шесть таких резонансов, легко объединяемых в пары, внутри которых они ориентированы “нулями” друг к другу (см. вставки на рис. 3b), хотя при больших значениях энергии встречаются и одиночные резонансы. Примечательно, что увеличение константы СОВ приводит главным образом к уширению этих резонансов, практически не сказываясь на положении самих пиков. Это проиллюстрировано на рис. 4, где представлены графики зависимости

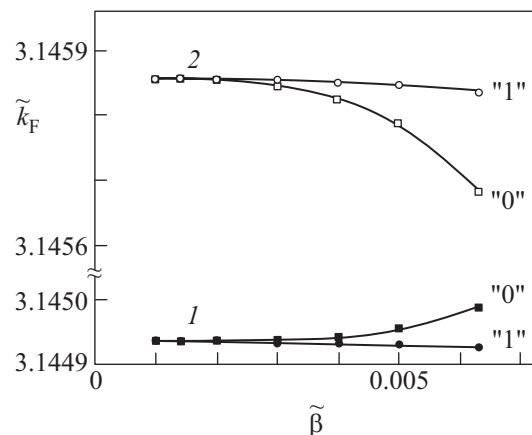


Рис. 4. Положение “единиц” и “нулей” для резонансов 1 и 2, отмеченных на рис. 3b, в зависимости от параметра СОВ Дрессельхауза

координат по оси  $k_F$  “единиц” (“1”) и “нулей” (“0”) для резонансов, отмеченных на рис. 3b цифрами “1” и “2”. Из рисунка видно, что положение пиков меняется очень незначительно по сравнению со смещением “нулей” резонансов.

Более показателен график, представленный на рис. 5. Здесь в двойном логарифмическом масштабе

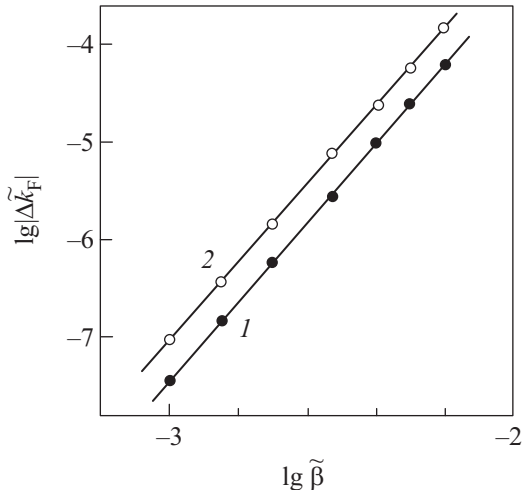


Рис. 5. Зависимость “ширины” резонансов 1 и 2 от параметра СОВ Дрессельхауза. Угловые коэффициенты прямых, проведенных по методу наименьших квадратов, равны 4.03 и 3.99 соответственно

показана зависимость “ширины” двух этих резонансов (расстояния  $\Delta k_F$  между “единицей” и “нулем”) от параметра СОВ Дрессельхауза. Угловые коэффициенты обеих аппроксимирующих прямых с точностью до нескольких сотых равны четырем. Отсюда следует, что ширина по  $k_F$  и энергии (поскольку  $\Delta E_F \approx \hbar^2 k_F \Delta k_F / m$ ) резонансов Фано, вызванных включением СОВ в изучаемой системе, оказывается пропорциональной четвертой степени (!) параметра СОВ. Использование в расчетах модели СОВ Рашбы дает тот же результат.

По-видимому, в такой ситуации есть все основания говорить о явлении коллапса резонансов Фано [11, 12], происходящего в данном случае при стремлении константы СОВ к нулю. С другой стороны, это же позволяет утверждать, что включение СОВ сколь угодно малой интенсивности при некоторых значениях энергии (в чрезвычайно узких областях) скажется вовсе не малым образом, вызывая проявление резонансных особенностей кондактанса. Без-

условно, дальнейшей задачей должно стать четкое установление причин появления дополнительных резонансов, а также установление точной взаимосвязи между их расположением, шириной и величиной константы СОВ.

В заключение приведем численные оценки. Так, если выбрать ширину входного и выходного каналов равной 0.1 мкм, то диаметр самого биллиарда составит 3 мкм. Ориентируясь на величину эффективной массы электронов проводимости в GaAs  $0.067m_e$ , получим единицу измерения константы СОВ, равную 1.154 эВ·нм. В этой ситуации интервал значений постоянной СОВ от 0 до  $0.006\beta_0$ , взятый для построения графиков на рис. 4 и 5, находится в хорошем согласии с тем диапазоном величин  $\beta$ , что имеет место в реальных структурах. Заметим снова, что все обсуждаемые здесь результаты справедливы также и для модели СОВ Рашбы, причем при тех же численных значениях параметра  $\alpha$ , что брались для константы СОВ Дрессельхауза.

Авторы выражают благодарность А. М. Сатанину за полезные обсуждения как физической, так и математической стороны настоящей задачи. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 09-01-00268), а также фонда “Династия”.

1. M. W. Wu, J. H. Jianga, and M. Q. Weng, Phys. Rep. **493**, 61 (2010).
2. Ю. Г. Кусраев, УФН **180**, 759 (2010).
3. G. Dresselhaus, Phys. Rev. **100**, 580 (1955).
4. Э. И. Рашба, ФТТ **2**, 1224 (1960).
5. Д. В. Хомицкий, Наноструктуры. Мат. физ. и моделир. **1**(1), 83 (2009).
6. В. Я. Демиховский, А. В. Тележников, Пов. рентг., синхр. и нейтр. иссл. **1**, 1 (2010).
7. K. Nakamura and N. Ishio, J. Phys. Soc. J. **61**, 3939 (1992).
8. Г. Г. Исупова, А. И. Малышев (в печати).
9. E. N. Bulgakov and A. F. Sadreev, Phys. Rev. B **66**, 075331 (2002).
10. S. J. Yong, A. M. Satanin, and C. S. Kim, Phys. Scr. **74**, 259 (2006).
11. Ч. С. Ким, А. М. Сатанин, Ю. С. Джо и др., ЖЭТФ **116**, 263 (1999).
12. Ч. С. Ким, О. Н. Рознова, А. М. Сатанин и др., ЖЭТФ **121**, 1157 (2002).