

## Векторные солитоны в условиях взаимодействия длинных и коротких волн

С. В. Сазонов<sup>+1)</sup>, Н. В. Устинов\*

<sup>+</sup>Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

\*Калининградский филиал Московского государственного университета путей сообщения, 236039 Калининград, Россия

Поступила в редакцию 30 августа 2011 г.

Получено векторное обобщение уравнений Ядзимы–Ойкавы для взаимодействия квазирезонансного поляризованного по кругу оптического импульса и длинноволнового электромагнитного всплеска. Показано, что данная новая система интегрируема методом обратной задачи рассеяния. Найдены и проанализированы его солитонные решения.

Исследование нелинейного взаимодействия между короткими и длинными волнами берет начало, по-видимому, с изучения динамики ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме [1]. Основная особенность этого взаимодействия состоит в том, что оно может быть сколько-нибудь эффективным лишь при выполнении условия резонанса Захарова–Бенни (РЗБ) [2]:

$$v_g(\omega) = v_{ph}, \quad (1)$$

где  $v_g(\omega)$  – групповая скорость коротковолновой (частоты  $\omega$ ) компоненты,  $v_{ph}$  – фазовая скорость длинноволновой компоненты.

Взаимодействие волн, подчиняющихся резонансному условию (1), описывается системой Захарова [1]. Если же рассмотрение ограничено длинными волнами, распространяющимися только в одном направлении, то система Захарова сводится к уравнениям Ядзимы–Ойкавы (ЯО). Как было обнаружено в [3], уравнения ЯО интегрируемы с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [4, 5] и имеют многосолитонные решения.

Оказалось, что уравнения Захарова и ЯО, исходно появившиеся в физике плазмы, универсальны. Они возникали в гидродинамике [2], физике ферромагнетиков [6], биофизике [7], акустике [8], оптоакустике [9], а также в задачах, связанных с оптическими способами генерации терагерцового электромагнитного излучения [10]. Интегрируемость уравнений ЯО позволила детально изучить методами теории солитонов особенности нелинейного взаимодействия длинных и коротких волн.

Можно сказать, что уравнения ЯО описывают распространение волн в анизотропных средах со слабыми дисперсией и нелинейностью. При этом к ко-

ротковолновой компоненте поля применимо приближение медленно меняющейся огибающей (ММО). В изотропных же средах со слабыми дисперсией и нелинейностью динамика такой компоненты (волнового пакета) описывается хорошо известным нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [11, 12], тоже интегрируемым с помощью МОЗР.

Помимо обычных (т.е. скалярных) систем Захарова и ЯО, в ряде задач возникали их векторные обобщения. В частности, на основе двухкомпонентной системы Захарова в [7] рассматривался перенос энергии двумя электронами с противоположными направлениями спинов в белковых молекулярных цепях. При исследовании генерации ультразвукового суперконтинуума с помощью двухчастотного гиперзвукового воздействия на парамагнитный кристалл была получена векторная система ЯО [13].

Некоторые векторные обобщения ряда нелинейных интегрируемых уравнений имеют физические приложения и при этом тоже интегрируемы с помощью МОЗР (см. [14] и литературу там же). В связи с этим возникает вопрос о возможности векторного интегрируемого обобщения уравнений ЯО, описывающего длинно- и коротковолновое взаимодействие в условиях РЗБ. Векторная система ЯО, выведенная в [13], скорее всего, не является интегрируемой. На это указывает численное моделирование столкновения импульсов, которое не обнаружило у них солитонного поведения.

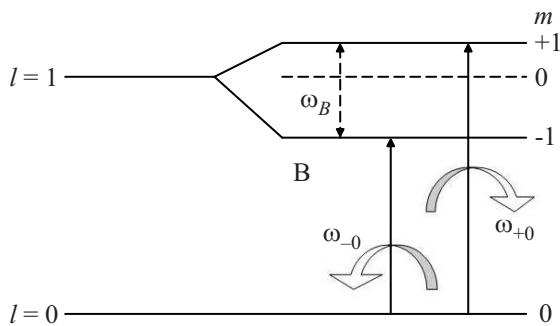
Известно, что взаимодействие между коротко- и длинноволновыми компонентами поля излучения может происходить из-за наличия в среде вкраплений несимметричных квантовых объектов (НКО) типа квантовых ям, квантовых нитей [15–17], примесных ионов [18], полярных молекул [19] и т.п., обладающих в стационарных состояниях постоянными дипольными моментами (ПДМ). Изучение нелинейной динами-

<sup>1)</sup> e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

ки электромагнитных импульсов в средах НКО привлекло большое внимание исследователей в последние годы [20–30]. Было обнаружено, что длинноволновая компонента, сдвигающая частоту квантового перехода вследствие ПДМ, оказывает существенное влияние на процессы формирования и распространения оптических импульсов.

Цель настоящей работы состоит в поиске интегрируемого векторного обобщения уравнений ЯО на основе решения задачи о квазирезонансном распространении в среде НКО двухчастотного (коротковолнового) оптического импульса и генерируемого им длинноволнового электромагнитного всплеска.

Пусть ПДМ НКО выстроены вдоль оси  $y$  прямоугольной декартовой системы координат. Вдоль оси  $z$  направлено внешнее магнитное поле, параллельно которому распространяется электромагнитный импульс. Будем считать, что несущие частоты его лево- и правовращающих оптических компонент, возбуждающих, соответственно, сигма-переходы  $0 \leftrightarrow -$  и  $0 \leftrightarrow +$  (см. рисунок), равны  $\omega_-$  и  $\omega_+$ . Сами частоты



Разрешенные в условиях геометрии Фарадея (при распространении импульсов вдоль магнитного поля) лево- и правовращающие квантовые переходы с собственными частотами  $\omega_-$  и  $\omega_+$ . Нумерация задействованных уровней соответствует проекциям  $m$  орбитального момента  $l$  на ось  $z$

сигма-переходов есть  $\omega_-$  и  $\omega_+$ , а частота запрещенного перехода  $- \leftrightarrow +$  равна частоте  $\omega_B$  зеемановского расщепления триплета возбужденного состояния с орбитальным моментом  $l = 1$ . Благодаря наличию ПДМ на зеемановское расщепление (снятие вырождения по проекции  $m$  орбитального момента) накладывается расщепление Штарка (снятие вырождения по абсолютной величине  $m$ ). Поэтому уровни, у которых  $|m| = 1$ , располагаются несимметрично относительно состояния с  $l = 1$  и  $m = 0$  (см. рисунок).

Оператор дипольного момента  $\hat{\mathbf{d}}$  рассматриваемой системы сигма-переходов, входящий в гамильтониан

$\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$  их взаимодействия с электрическим полем  $\mathbf{E}$  импульса, имеет вид

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} D_e \mathbf{e}_y & 0 & d \frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \\ 0 & D_e \mathbf{e}_y & d \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \\ d \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} & d \frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} & D_b \mathbf{e}_y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $D_e$  и  $D_b$  – ПДМ НКО в возбужденном и основном состояниях соответственно,  $d$  – дипольный момент переходов  $0 \leftrightarrow -$  и  $0 \leftrightarrow +$ ,  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  – орты осей  $x$  и  $y$ . Из (2) видно, что функции декартовых компонент  $E_x$  и  $E_y$  электрического поля различны: первая только возбуждает сигма-переходы, а вторая дополнительно сдвигает их частоту.

Самосогласованная система уравнений для элементов матрицы плотности  $\hat{\rho}$  НКО и электрического поля импульса записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_{\mu\nu}}{\partial t} = -i\omega_{\mu\nu} \rho_{\mu\nu} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}, \hat{\rho}]_{\mu\nu}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{\mathbf{d}}), \quad (4)$$

где  $\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, +, -$ ),  $n$  – зависящий от частоты показатель преломления изотропной среды в отсутствие НКО,  $N$  – концентрация НКО,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\hbar$  – постоянная Планка.

Применим к уравнениям (3), (4) приближение ММО [31, 32]. Следует иметь в виду, что в средах с ПДМ происходит генерация не только нечетных, но также и четных гармоник несущих частот [16, 26, 27, 30]. Ниже будем считать, что условие РЗБ выполнено только для “нулевой” гармоники. Это позволяет не учитывать высшие гармоники в разложениях материальных и полевых переменных. С точки зрения прикладных задач “нулевая” гармоника поля ассоциируется с терагерцовым излучением [30, 33, 34]. Исходя из сказанного выше используем следующие разложения для электрического поля и недиагональных элементов матрицы плотности:

$$\begin{aligned} E_x + iE_y &= \sqrt{2} \psi_+^* \exp[-i(\omega_+ t - k_+ z)] + \sqrt{2} \psi_- \exp[i(\omega_- t - k_- z)] + iE_T, \\ \rho_{0+} &= R_+ \exp[i(\omega_+ t - k_+ z)], \\ \rho_{0-} &= R_- \exp[i(\omega_- t - k_- z)], \\ \rho_{+-} &= R_{+-} \exp[i(\omega_{+-} t - k_{+-} z)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\omega_{+-} = \omega_+ - \omega_-$ ,  $k_+$ ,  $k_-$ ,  $k_{+-}$  – волновые числа, соответствующие своим частотам,  $\psi_+$  и  $\psi_-$  – комплексные огибающие право- и левовращающих

оптических компонент соответственно,  $R_+$ ,  $R_-$  и  $R_{+-}$  – огибающие элементов матрицы плотности,  $E_T$  – электрическое поле длинноволнового (терагерцового) всплеска, поляризованного вдоль оси  $y$ . Длинноволновая составляющая у компоненты  $E_x$  отсутствует, так как она не смещает частоты сигма-переходов.

Подстановка (5) в (3) и (4) дает после усреднения по времени следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho_{++}}{\partial t} = id \frac{\psi_+^* R_+ - \psi_+ R_+^*}{\hbar}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_{--}}{\partial t} = id \frac{\psi_-^* R_- - \psi_- R_-^*}{\hbar}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial R_+}{\partial t} = i \left( \Delta_+ - \frac{DE_T}{\hbar} \right) R_+ + id \frac{\psi_+ (\rho_{++} - \rho_{00}) + \psi_- R_{-+}}{\hbar}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial R_-}{\partial t} = i \left( \Delta_- - \frac{DE_T}{\hbar} \right) R_- + id \frac{\psi_- (\rho_{--} - \rho_{00}) + \psi_+ R_{+-}}{\hbar}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial R_{-+}}{\partial t} = i \Delta_{+-} R_{-+} - id \frac{\psi_+ R_-^* - \psi_-^* R_+}{\hbar}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial z} + \frac{n_{op}}{c} \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t} = -i \frac{4\pi dN \omega_{\pm}}{cn_{op}} R_{\pm}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 E_T}{\partial z^2} - \frac{n_T^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_T}{\partial t^2} = -\frac{4\pi DN}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_{00}}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Здесь  $\Delta_{\pm} = \omega_{0\pm} - \omega_{\pm}$  – отстройки от резонанса,  $\Delta_{+-} = \Delta_+ - \Delta_-$ ,  $D = D_e - D_b$  – ПДМ переходов  $0 \leftrightarrow -$  и  $0 \leftrightarrow +$ ,  $n_{op}$  и  $n_T$  – показатели преломления изотропной матрицы на оптических и терагерцовых частотах соответственно,  $\rho_{00} = 1 - \rho_{++} - \rho_{--}$ ,  $R_{-+} = R_{+-}^*$ . Кроме того, положено, что  $k_{\pm} = n_{op} \omega_{\pm} / c$ .

Правая часть уравнения (12) содержит диагональный элемент матрицы плотности основного состояния НКО. Будучи энергетической характеристикой, он нелинейно зависит от напряженности поля. Ниже будем рассматривать взаимодействие импульсов с НКО в квазирезонансном приближении [35, 36]. Пусть характерная длительность импульсов  $\tau_p$  такова, что выполняются условия

$$\varepsilon = (\Delta_+ \tau_p)^{-1} \sim (\Delta_- \tau_p)^{-1} \ll 1. \quad (13)$$

Тогда возбуждение НКО невелико, из-за чего нелинейность в (12) является слабой. Следовательно, можно ограничиться длинноволновой компонентой, распространяющейся только в одном направлении, и понизить порядок данного уравнения так, как это делалось в [3]. В результате получим

$$\frac{\partial E_T}{\partial z} + \frac{n_T}{c} \frac{\partial E_T}{\partial t} = \frac{2\pi DN}{cn_T} \frac{\partial \rho_{00}}{\partial t}. \quad (14)$$

Учитывая (13), применим метод последовательных приближений по малому параметру  $\varepsilon$ . При этом будем считать, что  $DE_T / \hbar \Delta_{\pm} \ll 1$  и что до импульсного воздействия НКО находились в основном состоянии ( $l = 0$ ,  $m = 0$ ). Тогда из (8) и (9) находим

$$R_+ \approx \frac{d\psi_+}{\hbar \Delta_+} (\rho_{00} - \rho_{++}) + \frac{dDE_T \psi_+}{(\hbar \Delta_+)^2} - \frac{d\psi_-}{\hbar \Delta_+} R_{-+} - \frac{i}{\Delta_+} \frac{\partial R_+}{\partial t}, \quad (15)$$

$$R_- \approx \frac{d\psi_-}{\hbar \Delta_-} (\rho_{00} - \rho_{--}) + \frac{dDE_T \psi_-}{(\hbar \Delta_-)^2} - \frac{d\psi_+}{\hbar \Delta_-} R_{+-} - \frac{i}{\Delta_-} \frac{\partial R_-}{\partial t}. \quad (16)$$

Подстановка (15), (16) в уравнение (10) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{-+}}{\partial t} = & i \left( \Delta_{+-} + \frac{d^2 |\psi_+|^2}{\hbar \Delta_+} - \frac{d^2 |\psi_-|^2}{\hbar \Delta_-} \right) R_{-+} - \\ & - i \frac{d^2 \Delta_{+-}}{\hbar^2 \Delta_+ \Delta_-} \left( 1 + \frac{D}{\hbar} \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{\Delta_+ \Delta_-} E_T \right) \psi_+ \psi_-^* + \\ & + \frac{d}{\hbar} \left( \frac{\psi_+}{\Delta_-} \frac{\partial R_-^*}{\partial t} + \frac{\psi_-^*}{\Delta_+} \frac{\partial R_+}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Положим теперь обе отстройки от резонанса равными друг другу:  $\Delta_- = \Delta_+ = \Delta$ . В этом случае несущие частоты обеих импульсных компонент отличаются на  $\omega_B$ . Кроме того, будем учитывать нелинейность не выше третьего порядка. Тогда в (17) останется только последнее слагаемое. Учитывая также (15) и (16), после интегрирования (17) получим

$$R_{-+} = \left( \frac{d}{\hbar \Delta} \right)^2 \psi_-^* \psi_+.$$

Подставив в правые части (15) и (16)  $R_{\pm} \approx d\psi_{\pm} / \hbar \Delta$  (так как изменение населенностей мало, считаем, что  $\rho_{00} = 1$ ,  $\rho_{++} = \rho_{--} = 0$ ), найдем во втором приближении по  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} R_+ = & \frac{d\psi_+}{\hbar \Delta} (\rho_{00} - \rho_{++}) + \frac{dDE_T \psi_+}{(\hbar \Delta)^2} - \\ & - \left( \frac{d}{\hbar \Delta} \right)^3 |\psi_-|^2 \psi_+ - \frac{id}{\hbar \Delta^2} \frac{\partial \psi_+}{\partial t} - \frac{d}{\hbar \Delta^3} \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$R_- = \frac{d\psi_-}{\hbar\Delta}(\rho_{00} - \rho_{--}) + \frac{dDE_T\psi_-}{(\hbar\Delta)^2} - \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^3 |\psi_-|^2 \psi_- - \frac{id}{\hbar\Delta^2} \frac{\partial\psi_-}{\partial t} - \frac{d}{\hbar\Delta^3} \frac{\partial^2\psi_-}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Отсюда и из (6), (7) после интегрирования для населенностей уровней будем иметь

$$\rho_{++} = \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^2 |\psi_+|^2, \quad \rho_{--} = \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^2 |\psi_-|^2, \quad (20)$$

$$\rho_{00} = 1 - \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^2 (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2).$$

Из (18)–(20) и (11) найдем

$$i \left( \frac{\partial\Phi_{\pm}}{\partial z} + \frac{1}{v_g(\omega_{\pm})} \frac{\partial\Phi_{\pm}}{\partial t} \right) = -\frac{k_2^{(\pm)}}{2} \frac{\partial^2\Phi_{\pm}}{\partial t^2} - 2\alpha_{\pm} (|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2) \Phi_{\pm} + \alpha_{\pm} U \Phi_{\pm}, \quad (21)$$

где

$$\Phi_{\pm} = \frac{d\psi_{\pm}}{\hbar\Delta} \exp(i\alpha_{\pm}z), \quad U = \frac{DE_T}{\hbar\Delta},$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{4\pi d^2 N \omega_{\pm}}{\hbar c n_{op} \Delta},$$

групповые скорости  $v_g(\omega_{\pm})$  оптических компонент определяются выражениями

$$\frac{1}{v_g(\omega_{\pm})} = \frac{n_{op}}{c} \left( 1 + \frac{2\pi d^2 \omega_{\pm}}{\hbar n_{op}^2 \Delta^2} \right),$$

а соответствующие ДГС  $k_2^{(\pm)} = 2\alpha_{\pm}/\Delta^2$ .

Обычно  $\omega_B = \omega_+ - \omega_- \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ с}^{-1}$ , в то время как  $\omega_+ \sim \omega_- \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Следовательно,  $(\omega_+ - \omega_-)/\omega_+ \sim 10^{-4} - 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Поэтому с хорошей точностью (по крайней мере до 0.1%) в коэффициентах уравнений (21) можно принять

$$\alpha_+ = \alpha_- = \alpha = \frac{4\pi d^2 N \omega}{\hbar c n_{op} \Delta}, \quad \omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2},$$

$$\frac{1}{v_g(\omega_+)} = \frac{1}{v_g(\omega_-)} = \frac{1}{v_g(\omega)} = \frac{n_{op}}{c} \left( 1 + \frac{2\pi d^2 \omega}{\hbar n_{op}^2 \Delta^2} \right),$$

$k_2^{(+)} = k_2^{(-)} = k_2 = 2\alpha/\Delta^2$ . Подставляя (20) в (14) и считая выполненным упоминавшееся в начале статьи условие РЗБ, придем к системе

$$i \frac{\partial\Phi_{\pm}}{\partial z} = -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2\Phi_{\pm}}{\partial \tau^2} - 2\alpha (|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2) \Phi_{\pm} + \alpha U \Phi_{\pm}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\beta \frac{\partial}{\partial \tau} (|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2),$$

где

$$\tau = t - \frac{z}{v_g(\omega)}, \quad \beta = \frac{2\pi D^2 N}{\hbar c n_T \Delta}.$$

В отсутствие ПДМ имеем  $D = \beta = U = 0$ . Система (22) переходит в этом случае в систему уравнений Манаква для  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$ , которая является интегрируемым векторным обобщением НУШ [37]. Именно система Манаква была первым подобным обобщением уравнения, интегрируемого с помощью МОЗР.

Пусть теперь, наоборот, анизотропия велика, так что  $|U| \gg |\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2$ . Тогда система (22) представляет собой векторную систему уравнений типа Ядзимы–Ойкавы:

$$i \frac{\partial\Phi_{\pm}}{\partial z} = -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2\Phi_{\pm}}{\partial \tau^2} + \alpha U \Phi_{\pm}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\beta \frac{\partial}{\partial \tau} (|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2).$$

Как оказалось, система (23) тоже является интегрируемой в рамках МОЗР. Обнаружено, что она допускает представление в виде условия нулевой кривизны:

$$\frac{\partial \hat{L}(\lambda)}{\partial z} - \frac{\partial \hat{A}(\lambda)}{\partial \tau} + [\hat{L}(\lambda), \hat{A}(\lambda)] = 0,$$

в котором матрицы  $\hat{L}(\lambda)$  и  $\hat{A}(\lambda)$  определены следующим образом:

$$\hat{L}(\lambda) = -\delta \begin{pmatrix} -\lambda & \Phi_+ & \Phi_- & -\frac{2i\alpha}{k_2\delta^2}U \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi_+^* \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi_-^* \\ i & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(\lambda) = \frac{i}{2} k_2 \delta^2 \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \lambda^2 & M(\Phi_+) & M(\Phi_-) & -|\Phi_+|^2 - |\Phi_-|^2 \\ -i\Phi_+^* & 0 & 0 & M(\Phi_+^*) \\ -i\Phi_-^* & 0 & 0 & M(\Phi_-^*) \\ 0 & i\Phi_+ & i\Phi_- & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\lambda$  – параметр, называемый спектральным в МОЗР,  $M(u) = -\delta^{-1} \partial u / \partial \tau - \lambda u$ ,  $\delta = (2\alpha\beta/k_2^2)^{1/3}$ .

Являясь интегрируемой, векторная система ЯО (23) имеет многосолитонные решения, которые соответствуют дискретной части данных рассеяния. Односолитонное решение этой системы в лабораторной системе координат записывается в виде

$$\Phi_{\pm} = \frac{k_2}{\tau_p} q_{\pm} \sqrt{\frac{\Omega}{\alpha\beta}} \exp(-i\theta_I) \operatorname{sech} \theta_R, \quad (24)$$

$$U = -\frac{k_2}{\alpha\tau_p^2} \operatorname{sech}^2 \theta_R,$$

где

$$\theta_R = \frac{t - z/v}{\tau_p}, \quad \theta_I = \Omega(t - z/v_g) + \frac{k_2}{2}(\Omega^2 - \tau_p^{-2})z, \quad (25)$$

$$q_+^2 + q_-^2 = 1, \quad 1/v = 1/v_g - k_2\Omega.$$

Данное решение является трехпараметрическим. В качестве свободных параметров здесь выбраны длительность  $\tau_p$  солитона, сдвиг  $\Omega$  несущих частот оптических компонент и один из “весовых” множителей,  $q_+$  или  $q_-$ , связанных между собой первым соотношением в (25). Так как в (24)  $\Omega > 0$ , несущие частоты испытывают сдвиг в красную область.

Как отмечалось выше, длинноволновый всплеск в прикладном смысле можно интерпретировать как широкополосное терагерцовое излучение. Красный частотный сдвиг при оптическом способе генерации терагерцового излучения наблюдался экспериментально в [38], а свое теоретическое объяснение на основе скалярной модели Ядзимы–Ойкавы и ее уточнений нашел в работах [10, 39]. Можно сказать, что векторная система ЯО (23) описывает генерацию терагерцового излучения двухчастотным оптическим импульсом, что сопровождается смещениями несущих частот в красную область.

Условие  $|U| \gg |\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2$ , при котором система (22) переходит в (23), выполняется, если справедливо неравенство

$$\frac{\omega\Omega}{\Delta^2} \frac{n_T}{n_{op}} \left(\frac{d}{D}\right)^2 \ll 1.$$

Чтобы импульс оставался в квазирезонансе с квантовыми переходами, должно выполняться неравенство  $\Omega \ll |\Delta|$ . Пусть  $\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Omega \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ,  $|\Delta| \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_p \sim 10^{-12} \text{ с}$ ,  $n_T \sim n_{op}$ . Тогда  $(d/D)^2 \ll 1$ . Такое условие вполне выполнимо как для полярных молекул, так и для искусственных НКО типа квантовых ям, нитей и т.д. [15–19].

Многосолитонные решения векторной системы ЯО (23) описывают упругие столкновения односолитонных импульсов (24). При этом они испытывают не только сдвиги по пространственной и временной координатам, сдвиги фаз оптических компонент, но также и изменение “весовых” множителей (т.е. поворот между компонентами).

Система (23) представляет собой обобщение уравнений ЯО на случай двух коротковолновых компонент, подчиняющихся условию РЗБ. Существует многокомпонентное обобщение уравнений ЯО подобного типа. Можно показать, что такое обобщение тоже является интегрируемым с помощью МОЗР.

Выше было отмечено, что частоты двух циркулярно поляризованных оптических составляющих близки друг к другу. Учитывая данное обстоятельство, из (24), (5) и связи между  $\Phi_{\pm}$  и  $\psi_{\pm}$  после сложных преобразований получим

$$E_x + iE_y = \sqrt{2\Omega} \frac{\hbar\Delta}{d} \frac{k_2}{\tau_p} \sqrt{\frac{1 + 2q_+q_- \cos 2\varphi}{\alpha\beta}} \times \exp(-i\gamma) \operatorname{sech} \theta_R - i \frac{\hbar\Delta k_2}{D\alpha\tau_p^2} \operatorname{sech}^2 \theta_R, \quad (26)$$

где

$$\varphi = \omega(t - z/v_{ph}) - \theta_I,$$

$$\gamma = \omega_B(t - z/v_{ph}) + \arctan \left( \frac{q_+ - q_-}{q_+ + q_-} \tan \varphi \right),$$

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{n_{op}}{c} \left( 1 + \frac{2\pi d^2 N}{\hbar n_{op}^2 \Delta} \right).$$

Видно, что  $\theta_I$  есть нелинейный набег фазы оптических компонент.

Выражение (26) описывает фазово-модулированный поляризованный по кругу оптический импульс с несущей частотой  $\omega - \Omega = (\omega_+ + \omega_-)/2 - \Omega$  и сопровождающий его линейно поляризованный однополярный всплеск, что можно рассматривать как нелинейное двулучепреломление, обусловленное ПДМ. Круговая поляризация возникает вследствие зеемановского расщепления квантовых уровней ( $\omega_B \neq 0$ ), а фазовая модуляция – из-за различия абсолютных величин параметров  $q_+$  и  $q_-$  (см. определение  $\gamma$ ). В случае  $|q_+| = |q_-| = 1/\sqrt{2}$  выражение (26) соответствует поляризованному по кругу оптическому импульсу без фазовой модуляции. Как было отмечено выше, после столкновения двух солитонов параметры  $q_+$  и  $q_-$  у каждого из них меняются, оставляя неизменным первое равенство в (25). Поэтому столкновение импульсов вида (24) меняет характер их фазовой модуляции. Например, если вначале фазовая модуляция отсутствовала, то она может появиться после столкновения.

Таким образом, в настоящей работе показана интегрируемость векторного обобщения уравнений Ядзимы–Ойкавы длинно- и коротковолнового взаимодействия, вообще говоря, на многокомпонентный случай. Детально разобранный здесь случай двухкомпонентного коротковолнового поля соответствует квазирезонансному распространению оптического импульса в системе сигма-переходов, образуемых простым зеемановским расщеплением. Не исключено, что интегрируемое обобщение в многокомпонентном случае можно получить, рассматривая взаимодействие многочастотного оптического импульса

с квазирезонансными сигма-переходами в условиях аномального эффекта Зеемана. Видимо, возможны и другие варианты, не обязательно связанные с оптическими задачами. На примере разобранный здесь двухкомпонентной векторной модели видно, что данные исследования могут иметь как фундаментальное, так и прикладное значение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 09-02-00503а).

1. В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* **62**, 1745 (1972).
2. D. J. Benney, *Stud. Appl. Math.* **55**, 93 (1977).
3. N. Yajima and M. Oikawa, *Progr. Theor. Phys.* **56**, 1719 (1976).
4. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, М.: Мир, 1988 [R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, London-Tokyo: Academic Press, Inc., 1982].
5. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, М.: Наука, 1980.
6. В. С. Львов, *Нелинейные спиновые волны*, М.: Наука, 1987.
7. А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах*, Киев: Наук. Думка, 1984.
8. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **118**, 20 (2000).
9. С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **81**, 259 (2005).
10. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, *КЭ* **35**, 1019 (2005).
11. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агарвал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*, М.: Физматлит, 2005.
12. Э. Скотт, *Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур*, М.: Физматлит, 2007.
13. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **139**, 464 (2011).
14. В. И. Найнов, *Многополевые солитоны*, М.: Физматлит, 2006.
15. В. Я. Демиховский, Г. А. Вугальтер, *Физика квантовых низкоразмерных структур*, М.: Логос, 2000.
16. S. Kočinac, Z. Ikonić, and V. Milanović, *Optics Commun.* **140**, 89 (1997).
17. Li Liang-shi and A. P. Alivisatos, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 097402 (2003).
18. H. Vogt, *Phys. Rev. B* **58**, 9916 (1998).
19. W. Yang, S. Gong, R. Li, and Z. Xu, *Phys. Rev. A* **74**, 013407 (2006).
20. L. W. Casperson, *Phys. Rev. A* **57**, 609 (1998).
21. A. Brown, W. J. Meath, and P. Tran, *Phys. Rev. A* **63**, 013403 (2000).
22. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Physica D* **138**, 134 (2000).
23. А. И. Маймистов, Дж.-Ги Капуто, *Опт. и спектр.* **94**, 275 (2003).
24. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **124**, 803 (2003).
25. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **127**, 289 (2005).
26. С. О. Елютин, *ЖЭТФ* **128**, 17 (2005).
27. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *КЭ* **35**, 701 (2005).
28. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 573 (2006); *ЖЭТФ* **130**, 646 (2006).
29. N. V. Ustinov, *Proc. SPIE* **6725**, 67250F-1 (2007); arXiv:0705.2833.
30. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Опт. и спектр.* **106**, 473 (2009).
31. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, М.: Мир, 1978.
32. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, М.: Наука, 1988.
33. D. H. Auston, A. M. Glass, and A. A. Ballman, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 897 (1972).
34. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **92**, 260 (2010).
35. M. D. Crisp, *Phys. Rev. A* **8**, 2128 (1973).
36. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, *Опт. и спектр.* **88**, 428 (2000).
37. С. В. Манаков, *ЖЭТФ* **67**, 543 (1974).
38. А. Г. Степанов, А. А. Мельников, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, *Письма в ЖЭТФ* **85**, 279 (2007).
39. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 470 (2008).