Письма в ЖЭТФ, том 94, вып. 9, с. 774 – 778

Отрицательные ионы Ar^-, Kr^-, Xe^- в сверхтекучем гелии

А. М. Дюгаев[+×], *П. Д. Григорьев*[+], *Е. В. Лебедева*[*1)]

[+] *Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[×] *Max-Plank-Institut for the Physics of Complex Systems, D-01187 Dresden, Germany*

[*] *Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

Поступила в редакцию 21 сентября 2011 г.

После переработки 13 октября 2011 г.

На примере Ar^-, Kr^-, Xe^- расширен каталог отрицательных ионов в сверхтекучем гелии. Такие объекты не могут существовать в вакууме, так как поляризационного притяжения электрона к инертному атому A не хватает для формирования связанного состояния A^-. Однако в гелии эти объекты существуют как стабильные или метастабильные с очень большим временем жизни. Эффект связан с локализацией электрона в жидком гелии. Если в газовой фазе над жидким гелием сформировать смесь возбужденных атомов A^* и электронов, возможна реакция $A^* + e = A^{*-}$, которая идет для всех атомов A таблицы Менделеева. Такие заряды могут быть внедрены в жидкий гелий электрическим полем. При этом радиационный распад $A^{*-} = A + e$, возможный в вакууме, может быть запрещен в жидкости. Это приводит к формированию новых уникальных объектов A^-, которые могут существовать в жидком гелии, но не встречаются в природе. Определен размер указанных заряженных образований, который может мало отличаться от радиуса обычного пузырькового состояния электрона в гелии.

В 1971 г. были открыты новые объекты в сверхтекучем гелии, которые получили название экзотических отрицательных ионов [1]. В современной литературе их иногда называют загадочными [2, 3]. Они хорошо изучены на опыте [4]. Последняя экспериментальная работа в этой области датирована 1987 годом [5]. По теме "экзотические отрицательные ионы в гелии" защищены две диссертации [6, 7]. Однако удовлетворительной теории экзотических ионов не существует, хотя попытки построить ее и предпринимались [8, 9]. Многие элементы таблицы Менделеева A имеют положительную энергию сродства к электрону, что приводит к образованию стабильного отрицательного иона A^- в вакууме [10]. Энергия связи электрона и атома ε_A меняется в широких пределах: $\varepsilon_A = 3.62$ эВ (Cl^-), $\varepsilon_A = 0.0245$ eV (Ca^-) [10]. Если в вакууме реализуется ион A^-, он, конечно, существует и в жидком гелии. Теория таких объектов предложена в работах [11, 12].

В нашей работе [13] на примере ионов Ca^- и Ba^-, имеющих очень малые значения энергии связи ε_A, показано, что существует некоторый критический размер иона $R_c \approx 12{-}14$ Å. При $\varepsilon_A < 0.1$ эВ можно положить $\varepsilon_A = 0$ (унитарный предел). Размер такого иона $R_i < R_c$. Указанное значение R_c нужно сравнивать с радиусом обычного (пустого) электронного пузырька $R_0 \simeq 19$ Å, который в данном случае является "единицей измерения" радиуса иона A^- в гелии. Точное значение R_c нам не понадобится. В экспериментах [2, 7] наблюдалось по крайней мере четыре крупных иона A^- в гелии, имеющих размер больший, чем R_c, но меньший, чем R_0: $R_i = 16.8$, 15.6, 14.2, 13.6 Å. Радиус ионов R_i мало отличается от радиуса электронного пузырька R_0: $R_i/R_0 = 0.88$, 0.82, 0.75, 0.72. Это обстоятельство является для нас решающим при построении теории таких ионов. На примере ионов Ar^-, Kr^-, Xe^-, которые не существуют в вакууме, мы расширим каталог отрицательных ионов в жидком гелии. Для этого необходимо рассмотреть задачу трех тел – электрон + гелий + атом. На первом этапе применим теорию возмущений. В нулевом приближении учтем взаимодействия электрона и жидкого гелия в простейшей модели Феррела [14]. Неравновесная энергия электронного пузырька $E_0(R)$ дается выражением

$$E_0(R) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 4\pi\sigma R^2. \qquad (1)$$

Импульс электрона k определяется граничным условием $k = \pi/R$, а его нормированная волновая функция имеет вид

$$\psi_e^2(r_e) = \frac{1}{2\pi R}\frac{\sin^2(\pi r_e/R)}{r_e^2}. \qquad (2)$$

Принимая для поверхностного натяжения гелия значение $\sigma = 0.274$ K/Å^2 и минимизируя $E_0(R)$ (1) по

1) e-mail: lebedeva@issp.ac.ru

A	L (Å)	α	λ	V_0 (K)	C_6	ν	$\Delta E(K)$	$\frac{R_0(\lambda)}{R_0(0)}$	$E_\hbar$ (K)	r_A Å	V_∞ (K)	V_M (K)
Ar	−0.79	11.1	0.042	103	9.6	8.96×10^{-3}	−101.6	0.969	2.28	0.89	−200	−20.1
Kr	−1.64	16.7	0.087	213	13	6.05×10^{-3}	−206	0.936	2.26	0.62	−250	−34.5
Xe	−3.02	27.3	0.16	392	19	4.67×10^{-3}	−368.6	0.882	2.45	0.47	−300	−55.8

L – длина рассеяния электрона на атоме [15], α – поляризуемость атома [10], параметр λ определен в (15), V_0 – масштаб потенциала $V^+(r)$ (8), C_6 – постоянная Ван-дер-Ваальса He-атом [17], параметр ν – определен в (8), ΔE – энергия связи электрона и атома в гелии, $R_0(\lambda)/R_0(0)$ – отношение радиуса отрицательного иона к радиусу электронного пузырька, $E_\hbar$ – энергия нулевых колебаний атома (11), r_A – амплитуда нулевых колебаний атома (12), V_∞ – энергия сольватации атома в гелии, V_M – максимальное значение потенциала $V_{eA}(4)$.

R, находим равновесные значения радиуса пузырька R_0 и его энергии $E_0 = E(R_0)$:

$$E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{mR_0^2} = 2451\,\mathrm{K};\ R_0 = \left(\frac{\hbar^2\pi}{8m\sigma}\right)^{1/4} = 18.86\,\text{Å}. \tag{3}$$

Поместим теперь атом A в точку r внутри электронного пузырька (см. рис. 1) и учтем два типа взаимодействия: атом+электрон ($V_{e\mathrm{A}}$) и атом+гелий

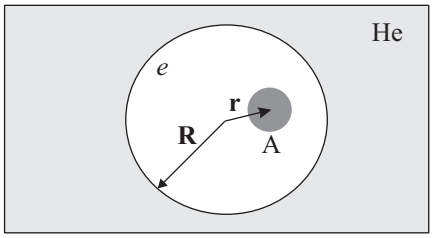

Рис. 1. Электронный пузырек со связанным инертным атомом A в жидком гелии

(V_{AHe}), по теории возмущений. Первое взаимодействие определяется псевдопотенциалом Ферми:

$$V_{e\mathrm{A}}(r) = \frac{2\pi\hbar^2 L}{m}\psi_e^2(r), \tag{4}$$

где L – длина рассеяния электрона на атоме. Для Ar, Kr, Xe длина L отрицательна [15] (см. таблицу). Второе взаимодействие имеет ван-дер-ваальсово происхождение [16]:

$$V_{\mathrm{AHe}}(r) = -\frac{4\pi}{3}\frac{n_{\mathrm{He}}C_6 e^2 r_{\mathrm{B}}^5}{R^3}\frac{1}{(1-r^2/R^2)^3}, \tag{5}$$

где C_6 – постоянная взаимодействия атом–гелий в атомных единицах [17], n_{He} – плотность гелия, r_{B} – боровский радиус.

Представление о зависимости полного атомного потенциала V^+ от r:

$$V^+(r) = V_{e\mathrm{A}}(r) + V_{\mathrm{AHe}}(r), \tag{6}$$

при $R = R_0$ дает рис. 2. Однако более информативна зависимость приведенного потенциала $V^*(x)$ от

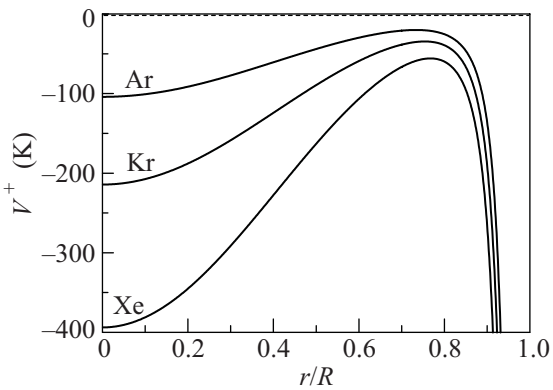

Рис. 2. Зависимости полного атомного потенциала $V^+(R)$ для атомов Ar, Kr и Xe

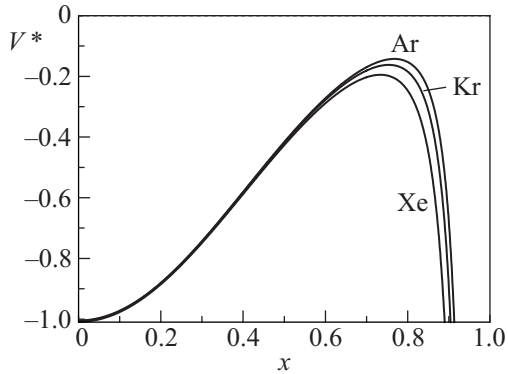

Рис. 3. Зависимости приведенного атомного потенциала $V^*(x)$ от приведенной координаты x для атомов Ar, Kr и Xe

приведенной координаты $x = r/R$ (рис. 3):

$$V^+(r) = V_0 V^*(x),$$

$$V^*(x) = -\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2 - \frac{\nu}{(1-x^2)^3}. \tag{7}$$

Выражение (7) следует из (2), (4), (5). Параметры V_0 и ν определяют масштаб $V^+(r)$ и конкуренцию сил притяжения атома к электрону и атома к жидкому гелию:

$$V_0 = \frac{\pi^2\hbar^2 a}{mR^3}, \quad \nu = \frac{\varepsilon_4 - 1}{3\pi^2}\frac{C_6}{\alpha a_*}. \tag{8}$$

Здесь a – модуль длины рассеяния L: $a \equiv -L > 0$, ε_4 – диэлектрическая проницаемость гелия, $\varepsilon_4 - 1 = 0.0572$, $\alpha = 1.38$ – поляризуемость атома He в атомных единицах, $a_* = a/r_{\rm B}$ – модуль длины рассеяния в атомных единицах. При определении параметра ν (8) использована связь ε_4 и поляризуемости α: $\varepsilon_4 = 1 + 4\pi\alpha r_{\rm B}^3 n_{\rm He}$. Это сделано для явного выделения малости $\nu \sim (\varepsilon_4 - 1)$. Указанные параметры приведены в таблице. Значение $V_0(R)$ дано для равновесного значения $R = R_0$ (3). Таблица содержит и величину потенциала $V^+(r)$ в точке его максимума $V_{\max}$ (рис. 2). Следует отметить, что малый параметр ν (8) не зависит от макроскопической величины R. Радиус электронного пузырька R определяет только масштабный множитель V_0 (8). Из (2), (8) следует критерий применимости теории возмущений для ионов Ar^-, Kr^-, Xe^-: $E_0 \gg V_0(R_0) = E_0\lambda$, $\lambda = a/R_0 \ll 1$. Ниже будет показано, что величина λ и есть малый параметр теории. Из рис. 3 видно, что приведенный потенциал $V^*(x)$ универсален, т.е. он слабо зависит от типа инертного атома. Такого рода скейлинговая инвариантность есть следствие универсальности законов взаимодействия электрона со всеми инертными атомами. Она описана в наших работах [16, 18].

Определив потенциал $V^+(r)$ (4)–(6), займемся вычислением энергии нулевых колебаний атома. Положив малый параметр $\nu = 0$, разложим $V^+(r)$ при малых r по степеням r^2 [19]:

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2, \quad r \ll R_0. \tag{9}$$

В этом выражении M – масса атома A, V_0 определено в (8), а частота ω связана с V_0, M и R_0 соотношением

$$\omega = \left(\frac{2}{3}\frac{V_0}{M}\frac{\pi^2}{R_0^2}\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Энергия нулевых колебаний $E_\hbar = 3\hbar\omega/2$ зависит от двух конкурирующих параметров, m/M и $1/\lambda = R_0/a$:

$$E_\hbar = V_0\left(\frac{3}{2}\frac{m}{M}\frac{R_0}{a}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Эти же параметры определяют пространственную зависимость волновой функции основного состояния атома $\psi_{\rm A}(r)$ [19]:

$$\psi_{\rm A}^2(r) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\frac{1}{r_{\rm A}^3}\exp\left(-\frac{r^2}{r_{\rm A}^2}\right),$$

$$r_{\rm A} = \frac{R_0}{\pi}\left(\frac{3}{2}\frac{m}{M}\frac{R_0}{a}\right)^{1/4}. \tag{12}$$

Из (11), (12) следует, что энергией нулевых колебаний $E_\hbar$ можно пренебречь, если

$$\frac{m}{M}\frac{R_0}{a} \ll 1. \tag{13}$$

Значения $E_\hbar$ и $r_{\rm A}$ для инертных атомов приведены в таблице. Видно, что имеют место сильные неравенства $E_\hbar \ll V_0$ и $r_{\rm A} \ll R_0$. Полагая $m/M = 0$, $E_\hbar = 0$ и $r_{\rm A} = 0$, из (1) и (8) получаем зависимость энергии $E^+(R)$ отрицательного иона A^- от R в первом порядке теории возмущений по малому параметру a/R_0:

$$E^+(R) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2} + 4\pi\sigma R^2 - \frac{\pi^2\hbar^2 a}{mR^3}. \tag{14}$$

Минимизируя E^+ как функцию R, находим радиус отрицательного иона $R_0(\lambda)$ и его энергию $E_0(\lambda)$:

$$\frac{R_0(\lambda)}{R_0(0)} = 1 - \frac{3}{4}\lambda; \quad \frac{E_0(\lambda)}{E_0(0)} = 1 - \lambda; \quad \lambda \equiv a/R_0(0). \tag{15}$$

Энергия "пустого" электронного пузырька $E_0(0)$ и его радиус $R_0(0)$ определены в (3). Главный результат этой части работы (15) вполне очевиден. Жидкий гелий локализует электрон, а электрон локализует в центре пузырька ($r = 0$) тяжелый атом, если длина рассеяния $L < 0$ ($a = -L > 0$), а нулевые колебания атома дают малый вклад в полную энергию отрицательного иона при условии (13). Согласно общей теории [19] случай отрицательной длины рассеяния отвечает существованию виртуального электронного уровня в потенциальном поле атома. В соответствии с (15) этот вакуумный виртуальный уровень становится реальным в жидком гелии.

Чтобы продвинуться дальше, вернемся к выражению (1) и воспользуемся ассимптотическим выражением для волновой функции электрона при больших значениях r:

$$\psi_e(r) \sim \sin(kr + \delta_k), \tag{16}$$

где δ_k – фаза рассеяния электрона на тяжелом атоме, локализованном в точке $r = 0$. На границе с жидким гелием (при $r = R$) поставим условие

$$\psi_e(R) = 0; \quad kR + \delta_k = \pi. \tag{17}$$

При малых k фаза рассеяния определяется одним параметром – длиной рассеяния L [19]:

$$\mathrm{tg}\delta_k = -kL = ka. \tag{18}$$

При условии $a \ll R$ из (17) и (18) следует

$$\delta_k = ka\left(1 - \frac{(ka)^2}{3}\right);$$

$$k = \frac{\pi}{R+a}\left(1 + \frac{\pi^2 a^3}{3(R+a)^3}\right). \qquad (19)$$

Из (1) и (19) с точностью до малых поправок a^3/R^3 получаем выражение для энергии отрицательного иона:

$$E(R) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m(R+a)^2} + 4\pi\sigma R^2. \qquad (20)$$

Из (20), минимизируя $E(R)$ по R, находим разложения E и R по параметру $\lambda = a/R_0(0)$:

$$\frac{E_0(\lambda)}{E_0(0)} = 1 - \lambda\left(1 - \frac{3}{8}\lambda\right),$$

$$\frac{R_0(\lambda)}{R_0(0)} = 1 - \frac{3}{4}\lambda\left(1 - \frac{1}{8}\lambda\right). \qquad (21)$$

В первом порядке по λ (21) переходит в полученный ранее результат (15). Для инертных атомов параметр λ мал и приближения (21) достаточны для определения $R_0(\lambda)$ и разницы $E_0(\lambda) - E_0(0)$ энергий отрицательного иона и электронного пузырька. В таблице приведены значения $R_0(\lambda)/R_0$ и $\Delta E = E_0(\lambda) - E_0(0)$.

Интересен унитарный предел $L = -\infty$ ($\lambda = \infty$), когда фаза рассеяния достигает максимального значения, $\delta_k = \pi/2$. В этом случае из (18) следует $k = \pi/(2R)$, а из (1) получаем

$$E(R) = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mR^2} + 4\pi\sigma R^2. \qquad (22)$$

Минимум энергии (22) достигается при

$$R_0(\lambda = \infty) = \frac{R_0(0)}{\sqrt{2}}; \quad E_0(\lambda = \infty) = \frac{1}{2}E_0(0). \qquad (23)$$

Следовательно, при изменении параметра λ в интервале $0 < \lambda < \infty$ радиус отрицательного иона $R_0(\lambda)$ меняется в области $R_0(0) > R_0(\lambda) > R_0(0)/\sqrt{2}$, а его энергия меняется в 2 раза, $E_0(0)/2 < E_0(\lambda) < E_0(0)$.

Укажем на согласованность результатов, полученных нами ранее для Ca^- [13]: $R_0 = 14.1$ Å, а также унитарного предела $R_0(\lambda = \infty) = R_0(0)/\sqrt{2} = 13.3$ Å. В недавней работе [3] с помощью численных методов значение радиуса отрицательного иона Ca^- было определено как $R_0 = 14.7$ Å. Считаем полезным указать область применимости асимптотического представления для электронной волновой функции $\psi_e(r)$ (16). Согласно [19] требуется, чтобы кинетическая энергия электрона K была много больше его потенциальной энергии на границе с гелием:

$$K \gg V(R_0), \quad K \simeq \frac{\pi^2\hbar^2}{2mR_0^2}, \quad V(R_0) = -\frac{\alpha r_b^3 e^2}{2R_0^4}. \qquad (24)$$

Неравенство (24) ограничивает значения α:

$$\alpha \ll \left(\frac{\pi R_0}{r_{\text{B}}}\right)^2 \simeq 10^4. \qquad (25)$$

Для инертных атомов (25) выполняется с большим запасом (см. таблицу).

Нетрудно численно найти обе функции, $E_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$. Для этого достаточно на основе (1), (17), (18) определить энергию отрицательного иона как функцию k:

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 4\pi\sigma\left(\frac{\pi - \delta_k}{k}\right)^2, \qquad (26)$$

и найти минимум функции (26) по k при заданном λ. Зависимости $E_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$ приведены на рис. 4, 5.

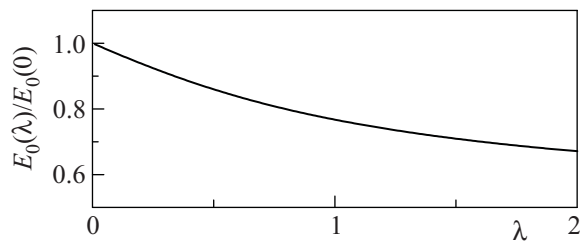

Рис. 4. Зависимость от параметра λ нормированной энергии отрицательного иона $E_0(\lambda)/E_0(0)$

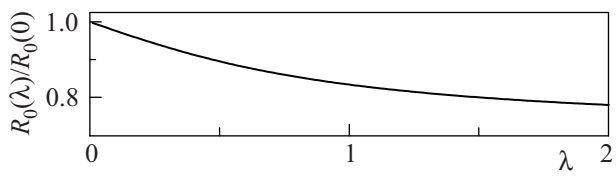

Рис. 5. Зависимость от параметра λ нормированного радиуса отрицательного иона $R_0(\lambda)/R_0(0)$

Дополним (23) асимптотиками $E_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$ при $\lambda \gg 1$:

$$\frac{R_0(\lambda)}{R_0(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\pi^2\lambda}, \quad \frac{E_0(\lambda)}{E_0(0)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi^2\lambda}. \qquad (27)$$

Эти формулы имеют бóльшую область применимости, чем допускается предположениями, сделанными при их выводе [19]. Они позволяют выполнить переход от виртуального ($L < 0$) к реальному вакуумному ($L > 0$) уровню, что отвечает изменению знака параметра $\lambda = -L/R_0(0)$ в (27). Требуется только близость к унитарному пределу, $|\lambda| \gg 1$. Иначе говоря, формулы (26), (27) описывают всю область унитарного режима.

Для определения времени жизни Ar^-, Kr^-, Xe^- в жидком гелии необходимо сравнить две величины:

энергию связи отрицательного иона ΔE и энергию сольватации атома жидкостью E_∞ (см. таблицу). Значения E_∞ мы оценили на основе результатов работы [20]. При $\Delta E < E_\infty$ отрицательный ион стабилен (Xe^-). Однако если $\Delta E > E_\infty$, ион распадается на электрон в пузырьковом состоянии и атом, окруженный гелиевой шубой, за время τ, которое оценивается по формуле [21]

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{\omega}{2\pi} e^{-\Delta V/T}, \tag{28}$$

где $\omega \sim 10^{11}\,\mathrm{c}^{-1}$ – частота, определенная в (10), а высота потенциального барьера $\Delta V = V_0 + V_{\max}$ (см. рис. 2 и таблицу). Для Ar $\Delta V \simeq 80\,\mathrm{K}$. Поэтому при гелиевых температурах ($T \sim 1$ K) согласно (28) τ оказывается больше времени жизни Вселенной ($\tau_{\mathrm{B}} \simeq 10^{18}\,\mathrm{c}$).

Укажем на перспективность исследования и других отрицательных ионов в гелии, которые не могут существовать в вакууме [10]: Mg^-, Mn^-, Zn^-, Cd^-. Интересны и кластеры типа Xe_n^-, $H_2O_n^-$ в каплях гелия [22, 23].

Экспериментальная методика обнаружения исследованных нами объектов по сути уже описана в [1–9]. В горячей плазме над жидким гелием присутствуют примесные атомы в основном (A) и возбужденном (A^*) состояниях, а также электроны (e). Если существует вакуумный ион A^-, то он может быть внедрен в жидкость. Радиус такого объекта в гелии $R < R_c$, где R_c отвечает унитарному пределу (23). Естественно, что такого типа ионы (H^-, O^-, O_2^-, Cu^-) следует считать нормальными. Если же ион A^- не существует в вакууме, то в нем может существовать ион A^{*-}. После внедрения в гелий и радиационного перехода $A^{*-} \to A^-$ он реализуется как стабильный или метастабильный ион с радиусом R меньшим, чем R_0 (3), но большим, чем R_c (23). Такие объекты условно можно назвать экзотическими. Для их существования требуется слабое условие $\delta_k > 0$ (см. (16), (26)). Таким образом, положительный знак фазы рассеяния электрона на атоме отвечает притяжению, пусть даже и слабому. Главная формула работы не зависит от длинноволнового представления фазы δ_k (18). Известно [24], что приближение (18) можно улучшить. Однако мы не стали этого делать, чтобы не затенить главного результата работы.

Если же $\delta_k < 0$ (см. (26)), то иона A^- не существует как в вакууме, так и в гелии. Это подтверждено численным расчетом для Ne^- [3] и опытом для H_2^- [25]. В [25] показано, что ионы H^- могут существовать после диссоциации молекулярного водорода H_2 в газовой фазе над жидким гелием, однако ион H_2^- не реализуется.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

1. G. G. Ihas and T. M. Sanders, Phys. Rev. Lett. **27**, 383 (1971).
2. H. J. Maris, J. Phys. Soc. Jpn. **77**, 111008 (2008).
3. F. Ancilotto, M. Barranco, and M. Pi, Phys. Rev. B **80**, 174504 (2009).
4. V. L. Eden and P. V. E. McClintock, Phys. Lett. A **102**, 197 (1984).
5. C. D. H. Williams, P. C. Hendry, and P. V. E. McClintock, Jpn. J. Appl. Phys. **26**(3), 105 (1987).
6. G. G. Ihas, PhD Thesis, University of Michigan (1971).
7. V. L. Eden, M. Phil. Thesis, University of Lancaster (1986).
8. T. M. Sanders and G. G. Ihas, Phys. Rev. Lett. **59**, 1722 (1987).
9. C. D. H. Williams, P. C. Hendry, and P. V. E. McClintock, Phys. Rev. Lett. **60**, 865 (1988); T. M. Sanders and G. G. Ihas, Phys. Rev. Lett. **60**, 866 (1988).
10. V. P. Shevelko, *Atoms and Their Spectroscopic Properties*, Springer, Berlin, 1997.
11. А. Г. Храпак, Письма в ЖЭТФ **86**, 282 (2007).
12. К. Ф. Волыхин, А. Г. Храпак, В. Ф. Шмидт, ЖЭТФ **108**, 1642 (1995).
13. П. Д. Григорьев, А. М. Дюгаев, ЖЭТФ **115**, 593 (1999).
14. R. A. Ferrel, Phys. Rev. **108**, 167 (1957).
15. Б. М. Смирнов, УФН **172**, 1411 (2002).
16. А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, Е. В. Лебедева, Письма в ЖЭТФ **91**(6), 324 (2010).
17. A. Dalgarno, Adv. Chem. Phys. **12**, 143 (1967).
18. Е. В. Лебедева, А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, ЖЭТФ **137**(4), 789 (2010).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М.: Физматлит, 2001.
20. F. Dalfovo, R. Mayol, M. Pi, and M. Barranco, Phys. Rev. Lett. **85**, 1028 (2000).
21. H. A. Kramers, Physica **7**, 284 (1940).
22. M. Farnik and J. P. Toennies, J. of Chem. Phys **118**, 4176 (2003).
23. G. H. Lee, S. T. Arnold, J. G. Eaton et al., Z. Phys. D: At., Mol. Clusters **20**, 9 (1991).
24. L. Spruch, T. F. O'Malley, and L. Rosenberg, Phys. Rev. Lett. **5**, 375 (1960); T. F. O'Malley, L. Spruch, and L. Rosenberg, J. Math. Phys. **2**, 491 (1961).
25. T. Arai, H. Yayama, and K. Kono, Low Temp. Phys. **34**, 397 (2008).