Письма в ЖЭТФ, том 95, вып. 1, с. 48 – 54 © 2012 г. 10 января

Дуальные сжатые состояния

А. И. Трубилко

Лаборатория квантовой информации и вычислений,
Государственный университет аэрокосмического приборостроения, 190000 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 16 ноября 2011 г.

Для простой системы из одиночного двухуровневого атома и высокодобротной резонаторной моды введены коллективные операторы, отвечающие двум разным алгебрам. Образующие первой имеют бозонные коммутационные соотношения, образующие второй получены полиномиальной деформацией алгебры su(2). Показано, что в условиях нахождения системы в перепутанном термостате, обладающем квантовыми корреляциями, в ней могут наблюдаться дуальные сжатые состояния, определяемые на основе рассматриваемых соотношений.

1. Введение. Развитие экспериментальной техники и методов измерений последнего времени позволяет проводить локализацию одиночных объектов. Так, удается достоверно зафиксировать наличие одиночного атома или иона в ловушке, а посредством резонаторов выделить уединенную высокодобротную полевую моду. Проведение исследований с такими объектами представляет несомненный интерес как с фундаментальной точки зрения, позволяя проверить основы кантовой механики и проводить контролируемые взаимодействия квантовых систем, так и с точки зрения их практического применения, например для целей квантовых коммуникаций.

Неклассическое (или квантовое) состояние одиночной системы обычно идентифицируется по нарушению некоторого неравенства. Например, сжатое состояние одной моды электромагнитного поля [1] может быть установлено по уменьшению дисперсии одной из его квадратурных компонент по сравнению с ее значением для когерентного состояния. Последнее определяет границу между квантовыми и классическими состояниями системы, являясь предельным случаем ее классического состояния. Для одномодового поля нарушение указанного неравенства отвечает подавлению шумов в низкочастотной области спектра шума фототока регистрируемого излучения ниже дробового уровня. Выявление сжатых состояний ансамбля атомов [2] также осуществляется по уменьшению дисперсии одной из наблюдаемых компонент коллективного спина относительно уровня, заданного средним значением оператора коллективной инверсии. Такие атомные системы могут использоваться в качестве памяти для хранения квантовой информации и последующего ее считывания [3]. Отметим, что для сжатых состояний систем разной природы сжатие одной из канонически сопряженных компонент приводит к увеличению дисперсии другой сопряженной компоненты, но соотношения неопределенностей при этом, естественно, не нарушаются.

Из многообразия многокомпонентных систем следует выделить двухкомпонентные несепарабельные системы, обладающие квантовыми взаимными корреляциями. Именно такие системы, находящиеся в особом квантовом перепутанном состоянии, используются в качестве ресурса протоколов квантовых коммуникаций, являясь основой кодирования, распределения и измерения информации. Посредством систем в таких состояниях также удается проверять фундаментальные основания квантовой механики, например неравенства Белла [4]. Идентификация квантового состояния двухкомпонентных систем одной и той же физической природы тоже возможна с помощью неравенств. Так, для двухчастичных дискретных систем низкой размерности применяется критерий Переса–Городецких [5], определяемый как отрицательное значение одного из собственных чисел транспонированной по одной из частиц матрицы плотности системы. Для двухкомпонентных бесконечномерных систем, например двух мод электромагнитного поля, известным неравенством является критерий Дуана–Саймона [6], определяемый суммой дисперсий их разностной координаты и суммарного импульса (или наоборот) относительно уровня, заданного суммой их значений в когерентном состоянии. Вместе с тем простейшая система, образованная одиночным атомом и выделенной резонаторной модой, обладающими квантовыми корреляциями, является сложной. Единого (даже математического) критерия в этом случае не найдено, поскольку атом имеет конечномерное пространство и описывается дискретным набором переменных, в то время как выделенная полевая мода образует бесконечномерное пространство и характеризуется непрерывными переменными. Рассматриваемые подсистемы описываются и разными алгебрами образующих. Первая в простейшем случае двухуровневой системы описывается образующими алгебры операторов su(2). Полевая подсистема описывается алгеброй бозонных операторов Гейзенберга–Вейля.

В этой работе мы исследуем состояние отдельного двухуровневого атома и резонаторной моды, находящихся в разных пространственных областях и не взаимодействующих между собой непосредственно, при воздействии на них широкополосных световых полей с квантовой корреляцией. Такие световые поля могут быть получены на основе параметрических источников [7]. Если такие световые поля являются термостатом, то их квантовые корреляции переносятся на состояние анализируемой системы. При этом атом и резонаторная мода могут выступать как коллективная система или единый кластер, описание которых оказывается возможным с помощью полиномиальных алгебр. Понятие полиномиальной алгебры в квантовой оптике введено в работе [8]. Посредством концепции квазиспина [9] оно было применено для введения понятия поляризационно скалярного света [10]. Также эти алгебры были использованы и при описании поляризационных преобразований многомодовых световых полей [11], коллективных кластерных состояний [12] и в поляризационной квантовой томографии [13]. Объект, подобный рассматриваемому и описываемый путем деформации исходной алгебры углового момента su(2), изучался в работе [14]. В ней было исследовано взаимодействие атомного ансамбля, локализованного в микрорезонаторе, в условиях комбинационного резонанса внешних электромагнитных полей и квантов резонаторной моды с оптически запрещенным атомным переходом. В рассматриваемом нами случае коллективная система обладает дуальными свойствами как одиночного атома, так и уединенной высокодобротной световой моды и может быть дуально описана разными коллективными операторами, отвечающими двум разным коммутационным соотношениям. Мы демонстрируем, что наличие в системе одиночного двухуровневого атома дает возможность введения коллективных операторов, образующих обычную алгебру Гейзенберга–Вейля, с бозонными коммутационными соотношениями. Образующие алгебры третьего порядка для других коллективных операторов атомно-фотонного кластера, одно из коммутационных соотношений которой отвечает алгебре su(2), могут быть получены посредством деформации алгебры углового момента. На основе введенных операторов образующих этих двух алгебр для исследуемой коллективной системы удается построить когерентные обобщенные состояния, а посредством коммутационных соотношений выявить условия, при которых в системе обнаруживаются дуальные сжатые состояния. Они фиксируются по уменьшению среднего от дисперсии одной из наблюдаемых относительно ее значения для когерентного состояния.

Статья построена следующим образом. Вначале мы приводим простую известную модель параметрического источника и описываем ее статистические свойства. Далее в марковском приближении строится кинетическое уравнение для релаксации одиночной двухуровневой системы (атома) и выделенной высокодобротным резонатором полевой моды в перепутанном термостате, обладающем квантовыми корреляциями. Наконец вводятся два вида коллективных операторов, описывающих рассматриваемую систему. С их помощью введены когерентные состояния кластера и рассмотрены два вида сжатых состояний системы.

2. Параметрический источник и его свойства. В качестве простого источника светового поля, две пространственные широкополосные компоненты которого обладают взаимными квантовыми корреляциями, выберем параметрический источник, основанный на взаимодействии волн в нелинейной квадратичной среде. Такой процесс может быть описан на основе эффективного гамильтониана $V = i\hbar\chi(b_1^\dagger b_2^\dagger - \mathrm{h.c.})$. Здесь χ – константа связи, пропорциональная квадратичной восприимчивости нелинейной среды и интенсивности волны накачки с частотой Ω, $b_m^\dagger, b_m$ – операторы рождения и уничтожения мод $m = 1, 2$ с частотой ω: $\omega + \omega = \Omega$. При таком описании предполагаются выполненными условия фазового синхронизма, которые связывают волновые векторы мод. Последние имеют конечную ширину $\delta\omega$, которая определяется полосой синхронизма. Поэтому операторы рождения и уничтожения могут рассматриваться в качестве огибающих генерируемых компонент.

При генерации из вакуума состояние выделенных пространственных компонент на выходе источника определяется волновой функцией [15]

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(r)|n\rangle \otimes |n\rangle, \qquad (1)$$

где $r = \chi t$ – параметр сжатия, а $|n\rangle$ отвечает фоковскому состоянию. Волновая функция (1) полностью определяет все статистические свойства света генерации, которые описываются корреляционными функциями любого порядка. Так, например, средние от корреляторов огибающих полевых операторов второго порядка определены корреляционной матрицей вида

$$\langle b_m^i(t) b_n^j(t+\tau)\rangle = \mathcal{K}_{mn}^{i,j}\delta(\tau), \tag{2}$$

где $i, j = \dagger, -$ отвечают операторам рождения и/или уничтожения (верхний индекс у оператора уничтожения мы будем опускать). В правой части (2) временная дельта-функция является крупномасштабной и имеет ширину, которая определяется обратной шириной полосы синхронизма $(\delta\omega)^{-1}$. Поскольку статистика света является гауссовой, для описания свойств света достаточно введенной матрицы. Для состояния (1) нетрудно найти следующие отличные от нуля элементы корреляционной матрицы:

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} = \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} = N, \quad \mathcal{K}_{11}^{-,\dagger} = \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} = N+1, \\ &\mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} = \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} = M, \quad \mathcal{K}_{12}^{-,-} = \mathcal{K}_{21}^{-,-} = M^*, \end{aligned} \tag{3}$$

где $N = \sinh^2(r)$ – среднее число фотонов в модах, величина $M = \cosh(r)\sinh(r)\exp(-i\phi)$ описывает межмодовую оптическую когерентность, ϕ – фаза классической волны накачки.

Видно, что состояние (1) не факторизуется, а следовательно, является перепутанным. Физической причиной этого является наличие взаимной квантовой корреляции мод источника, что и приводит к нарушению известного неравенства Дуана–Саймона [6] для непрерывных переменных:

$$\langle(\Delta Q)^2\rangle + \langle(\Delta P)^2\rangle \geq 1. \tag{4}$$

Здесь $\langle(\Delta Q)^2\rangle = \langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2$, $\langle(\Delta P)^2\rangle = \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2$ дисперсии операторов разностной координаты $Q = q_1 - q_2$ и суммарного импульса $P = p_1 + p_2$. Операторы канонической координаты q_m и импульса p_m мод $m = 1, 2$ определены соотношениями $b_m = q_m + ip_m$. Для рассматриваемой модели параметрического источника

$$\langle(\Delta Q)^2\rangle = \langle(\Delta P)^2\rangle = \frac{1}{2}[2N + 1 - 2|M|\cos(\phi)].$$

Это означает, что в условиях, когда фаза классической волны накачки $\phi = 0$, при $r \neq 0$ неравенство (4) нарушается, причем тем сильнее, чем большее значение имеет параметр сжатия r. Экспериментальное детектирование, а следовательно, и идентификация квантовых корреляций мод и перепутывания представленного состояния сводятся к гетеродинному детектированию спектров шумов фототоков при одномоментном измерении коммутирующих между собой разностной координаты и суммарного импульса мод. При таком детектировании для анализируемого состояния наблюдается подавление ниже стандартного квантового предела, которое при больших значениях параметра сжатия приводит к почти полному подавлению дробового шума в низкочастотной области спектра для обеих наблюдаемых.

3. Уравнение релаксации атома и моды в перепутанном термостате. Будем предполагать, что рассматриваемый параметрический источник с квантовыми корреляциями каждой из своих компонент воздействует на две независимые системы: двухуровневый атом и высокодобротный резонатор, находящиеся в разных пространственных областях. Частоту перехода между рабочими уровнями атома и собственную частоту резонатора считаем совпадающими. Мы будем предполагать, что две компоненты параметрического источника являются широкополосными в том смысле, что их собственные спектральные ширины $\delta\omega$ много больше скоростей спонтанных распадов атома γ и резонаторной моды C в вакуум. Считая взаимодействие компонент со своими подсистемами квазирезонансным, опишем его в электродипольном приближении в традиционном виде

$$V_m = -i\hbar\int d\omega\eta_m(\omega)[b_m(\omega)X^\dagger - \text{h.c.}]. \tag{5}$$

Здесь $\eta_m(\omega)$ – константы связи, операторы $X^\dagger, X$ отвечают операторам рождения $(a^\dagger)$ и уничтожения (a) резонаторной моды при описании взаимодействия соответствующей компоненты светового источника и высокодобротной резонаторной моды. Напомним, что операторы этой выделенной моды отвечают бозонным коммутационным соотношениям $[a^\dagger, a] = 1$ алгебры Гейзенберга–Вейля. При описании взаимодействия с двухуровневым атомом операторы $X^\dagger, X$ являются операторами $S^+ = |e\rangle\langle g|, S^- = |g\rangle\langle e|$ перехода между нижним $(|g\rangle)$ и верхним $(|e\rangle)$ состояниями. Эти операторы отвечают коммутационным соотношениям $[S^+; S^-] = S_z$, $[S_z; S^\pm] = \pm 2S^\pm$, характерным для алгебры su(2). Здесь $S_z = (|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|)$ – оператор инверсии. Операторы $b_m^\dagger(\omega), b_m(\omega), m = 1, 2$, являются операторами рождения и уничтожения соответствующей пространственной компоненты моды источника, которые связаны с огибающими $b_m(t)$ соотношением $b_m(t) = \int d\omega b_m(\omega), b_m(\omega) = b_m(\omega, t_0)\exp[-i\omega(t - t_0)]$. Интегрирование в последнем соотношении и в (5) производится по всей широкой полосе источника, а сам вид представленного взаимодействия отвечает пренебрежению эффектами отдачи при поглощении и излучении атома, вырождением его уровней по проекциям углового момента и поляризационным состоянием световых полей.

Кинетическое управляющее уравнение для подсистем можно получить, например, используя технику стохастического интегрирования Ито. При этом следует рассматривать широкополосные моды источника как термостат и использовать марковское приближение. Последнее означает, что, во-первых, поля источников считаются заданными и подчиненными только свободной эволюции. Во-вторых, константы связи следует считать не зависящими от частоты $\eta_m(\omega) = \sqrt{\gamma_m/2\pi}$. Указанный способ является традиционным для задач квантовой оптики [16]. Впервые он был применен в работе [17] для описания взаимодействия одиночного двухуровневого атома со сжатым термостатом. Отметим, что мы применяли этот подход для описания эволюции двухкомпонентных систем разной физической природы в поле перепутанного термостата с квантовыми корреляциями в ряде наших работ [18].

Управляющее уравнение для матрицы плотности подсистем (атома и высокодобротной резонаторной моды) в используемых приближениях имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2}\Big[N(S^-S^+\rho - 2S^+\rho S^- + \rho S^-S^+) + \\ + (N+1)(S^+S^-\rho - 2S^-\rho S^+ + \rho S^+S^-)\Big] - \\ - \frac{C}{2}\Big[N(aa^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho a + \rho aa^\dagger) \\ + (N+1)(a^\dagger a\rho - 2a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a)\Big] - \\ - \sqrt{\gamma C}\Big[M(aS^-\rho - S^-\rho a - a\rho S^- + \rho aS^-) + \\ + M^*(a^\dagger S^+\rho - S^+\rho a^\dagger - a^\dagger\rho S^+ + \rho a^\dagger S^+)\Big]. \qquad (6)\end{aligned}$$

Полученное уравнение описывает совместную динамику анализируемой подсистемы в перепутанном или несепарабельном термостате. В (6) два первых слагаемых, пропорциональные γ и C, описывают обычную релаксацию. Последнее слагаемое описывает эффективное взаимодействие между атомом и модой, которое возникает из-за квантовых корреляций термостата. В этом смысле данное слагаемое отвечает за перенос квантовых корреляций от термостата к подсистемам. Заметим, что в симметричном случае, когда $\gamma = C$, вклад всех слагаемых в (6) имеет один порядок величины.

4. Коллективные операторы системы и сжатые состояния на их основе. Двухкомпонентный перепутанный термостат, обладающий квантовыми корреляциями компонент, при воздействии на изначально независимые атом и высокодобротную моду порождает между ними корреляции. Более того, эти корреляции также могут являться квантовыми, проявляя свои неклассические особенности даже в стационарных условиях. Для описания рассматриваемой объединенной системы возможно введение коллективных операторов, на основе которых можно построить и средние от наблюдаемых. При этом следует отметить, что даже такой простейший атомно-фотонный кластер, как коллективная система, является сложным. Это обусловлено тем, что сама система состоит из двух компонент, одна из которых – дискретная, а другая – непрерывная. Кроме того, каждая из компонент описывается своей алгеброй операторов ее образующих. В условиях возбуждения системы внешним термостатом с квантовой корреляцией такая двойственность приводит к дуальным сжатым состояниям коллективной системы. Такие состояния построены на основе образующих алгебр двух видов. Первые обусловлены бозонными коммутационными соотношениями, характерными для алгебры Гейзенберга–Вейля, вторые – коммутационными соотношениями, отвечающими полиномиальной алгебре третьего порядка, полученной деформацией алгебры углового момента.

Рассмотрим коллективные операторы рождения ($\mathcal{A}^\dagger$) и уничтожения ($\mathcal{A}$), описывающие одиночный двухуровневый атом и выделенную высокодобротную резонаторную моду как коллективную систему в целом, которые построены из исходных операторов следующим образом:

$$\mathcal{A}^\dagger = a^\dagger(S^+ + iS^-), \quad \mathcal{A} = a(S^- - iS^+). \qquad (7)$$

Норма коллективного оператора числа возбуждений $\mathcal{N} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ определяется средним от оператора числа фотонов, $\langle\mathcal{N}\rangle = \langle a^\dagger a\rangle \geq 0$, и, следовательно, положительна. Сами операторы (7) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Гейзенберга–Вейля $[\mathcal{A}, \mathcal{A}^\dagger] = 1$. Значит, их можно рассматривать в качестве обычных бозонных операторов рождения и уничтожения возбуждения в системе.

Определим теперь когерентное состояние коллективной системы, которое является предельным случаем классических состояний системы и определяет границу между ее классическими и квантовыми состояниями. Как хорошо известно, когерентные состояния порождаются действием на вакуумное состояние оператора сдвига $\exp(\alpha\mathcal{A}^\dagger + \alpha^*\mathcal{A})$. В нашем случае вакуумное состояние системы можно выбрать, например, как прямое произведение вакуума электромагнитного поля $|0\rangle_f$ и основного состояния атома $|g\rangle_{at}$:

$$|\mathrm{vac}\rangle = |0\rangle_f \otimes |g\rangle_{at}. \qquad (8)$$

Следовательно, когерентное состояние в рассматриваемом случае имеет вид $|\alpha\rangle = \exp(\alpha\mathcal{A}^\dagger + \alpha^*\mathcal{A})|\mathrm{vac}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{i}}\Big[|\sqrt{i}\alpha\rangle_f\Big(|e\rangle_{at} + |g\rangle_{at}\Big) + |-\sqrt{i}\alpha\rangle_f\Big(|g\rangle_{at} - |e\rangle_{at}\Big)\Big]$.

Введем коллективные операторы канонической коллективной координаты, $\hat{Q} = (1/2)(\mathcal{A}^\dagger + \mathcal{A})$ и импульса $\hat{P} = (1/2i)(\mathcal{A}^\dagger - \mathcal{A})$, с обычным коммутационным соотношением и соотношением неопределенностей $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle \geq 1/16$. Для случая когерентного коллективного состояния это соотношение минимизируется, а дисперсии координаты и импульса одинаковы и равны $\langle\alpha|(\Delta\hat{Q})^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(\Delta\hat{P})^2|\alpha\rangle = 1/4$. Естественно, что сжатое состояние можно определить как состояние, среднее от дисперсии одной из компонент которого меньше, чем для когерентного.

Дисперсии коллективных координаты и импульса могут быть определены на основе следующих атомно-полевых средних:

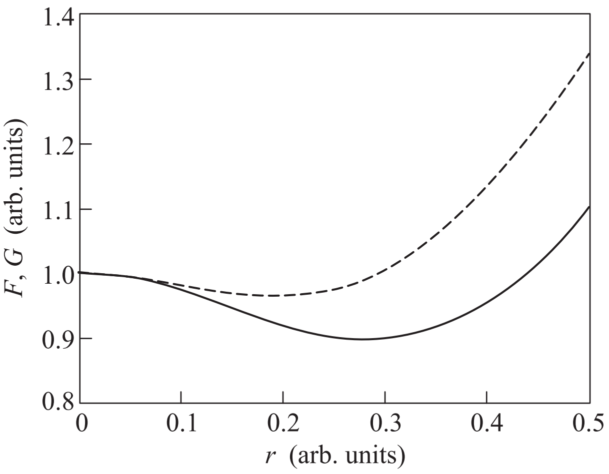
$$\langle\hat{Q}^2\rangle = \frac{1}{4}(\langle aa^\dagger\rangle + \langle a^\dagger a\rangle - i(\langle a^2\rangle - \langle a^{\dagger 2}\rangle)),$$
$$\langle\hat{P}^2\rangle = \frac{1}{4}(\langle aa^\dagger\rangle + \langle a^\dagger a\rangle + i(\langle a^2\rangle - \langle a^{\dagger 2}\rangle)),$$
$$\langle\hat{Q}\rangle = \frac{1}{2}(\langle a^\dagger S^+\rangle + \langle aS^-\rangle + i(\langle a^\dagger S^-\rangle - \langle aS^+\rangle)),$$
$$\langle\hat{P}\rangle = \frac{1}{2i}(\langle aS^-\rangle - \langle a^\dagger S^-\rangle - i(\langle aS^+\rangle - \langle a^\dagger S^-\rangle)).$$

Необходимые средние можно получить с помощью управляющего уравнения (6).

Здесь и в дальнейшем мы будем анализировать стационарную ситуацию в оптимальном, как показывает расчет, случае равенства скорости затухания моды и скорости релаксации атома, $\gamma = C$. В данном случае имеем следующий явный вид искомых средних:

$$\langle\hat{Q}^2\rangle = \langle\hat{P}^2\rangle = \frac{1}{4}(2N+1),$$
$$\langle\hat{Q}\rangle = \frac{1}{2}\frac{(M^* + M)}{(2N+1)(N+1)},$$
$$\langle\hat{P}\rangle = \frac{1}{2i}\frac{(M^* - M)}{(2N+1)(N+1)}.$$

Как уже отмечалось, мы выбираем состояние исходного термостата, перепутанного по отношению к разностной координате и суммарному импульсу. Зависимость дисперсии нормированной коллективной координаты относительно уровня, отвечающего дисперсии этого же оператора в случае когерентного состояния, $F \equiv \langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle/\langle\alpha|(\Delta\hat{Q})^2|\alpha\rangle$, от параметра сжатия исходного источника представлена на рисунке штрихпунктирной кривой. Из этого рисунка можно сделать следующие выводы. В рассматриваемой коллективной системе формируются сжатые состояния коллективной координаты $F(r) < 1$ в области значений параметра сжатия исходного источника $0 < r \lesssim 0.3$. Минимальное оптимальное сжатие



Нормированные дисперсии наблюдаемых разностной коллективной координаты (штрихпунктирная кривая) и коллективного оператора $\mathcal{M}_x$ (сплошная кривая). Единица отвечает уровню когерентных состояний

наблюдается при $r = 0.2$. При этом функция имеет значение $F(0.2) = 0.966$. Дисперсия импульса, как показывают исследования, при любых значениях параметров сжатия оказывается больше, чем в случае когерентного состояния. Сжатое по импульсу состояние может быть получено, если взять исходный источник с состоянием, перепутанным по другой паре переменных.

Рассматриваемая коллективная система обладает, наряду с бозонными, также и фермионными чертами, которые описывают двухуровневый одиночный атом посредством алгебры su(2). Это обстоятельство позволяет ввести коллективные операторы рождения ($\mathcal{M}_+ = a^\dagger S^+$) и уничтожения ($\mathcal{M}_- = aS^-$) возбуждения системы. Совместно с коллективным оператором числа возбуждений в системе $\mathcal{M}_0 = \frac{1}{2}(\frac{S_z}{2} + a^\dagger a)$ названные операторы являются образующими полиномиальной алгебры возбуждений третьего порядка со следующими коммутационными соотношениями:

$$\Big[\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\pm\Big] = \pm\mathcal{M}_\pm,$$
$$\Big[\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-\Big] = p_n(\mathcal{M}_0) - p_n(\mathcal{M}_0 + 1). \qquad (9)$$

Здесь структурный полином задан произведением $p_n(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_+\mathcal{M}_- = c_0\prod_{i=1}^{n=3}(\mathcal{M}_0 - q_i)$ и имеет следующие операторозначные параметры: $c_0 = -1, q_1 = \frac{1}{2}\Big(1-\mathcal{K}\Big), q_2 = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{K}-\frac{3}{2}\Big), q_2 = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{K}+\frac{5}{2}\Big)$. Оператор Казимира данной алгебры $\mathcal{K} = a^\dagger a - \frac{S_z}{2} + \frac{1}{2}$ совместно с оператором числа возбуждений $\mathcal{M}_0$ определяет базис Картрана–Вейля с неотрицательными собственными значениями этих операторов. Единственность именно этой алгебры третьего порядка диктуется представлением второго коммутационного соотношения (9) разностью соответствующих полиномов.

Обычным образом перейдем к эрмитовским операторам наблюдаемых $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_+ + \mathcal{M}_-, i\mathcal{M}_y = \mathcal{M}_+ - \mathcal{M}_-$, средние от дисперсий которых удовлетворяют соотношению неопределенностей

$$\langle(\Delta\mathcal{M}_x)^2\rangle\langle(\Delta\mathcal{M}_y)^2\rangle \geq \langle\mathcal{K}S_z\rangle^2, \qquad (10)$$

где произведение операторов $\mathcal{K}S_z = a^\dagger a S_z + \frac{S_z}{2} - \frac{1}{2}$.

Соотношение (10) является основанием для определения сжатых состояний рассматриваемой системы на основе введенной полиномиальной алгебры. Когерентное состояние $|\xi\rangle$ в данном случае определяется на основе обобщенных когерентных состояний [19] и может быть получено действием на вакуумное состояние системы (8) обобщенным оператором сдвига: $|\xi\rangle = \exp(\xi\mathcal{M}_+ - \xi^*\mathcal{M}_-)|vac\rangle$. Равенство в (10) выполняется при одинаковых значениях дисперсий операторов наблюдаемых в когерентном состоянии, $\langle\xi|(\Delta\mathcal{M}_x)^2|\xi\rangle = \langle\xi|(\Delta\mathcal{M}_y)^2|\xi\rangle = \langle\xi|(\mathcal{K}S_z)|\xi\rangle = 1$. Именно оно и определяет границу между классическими и неклассическими (квантовыми) состояниями рассматриваемой системы.

Определим посредством неравенства сжатые или неклассические состояния

$$\langle(\Delta\mathcal{M}_\alpha)^2\rangle < |\langle\mathcal{K}S_z\rangle| \qquad (11)$$

для любой из компонент $\alpha = x, y$. Средние от дисперсий операторов простым образом выражаются через стационарные атомно-полевые средние: $\langle(\Delta\mathcal{M}_\alpha)^2\rangle = \langle\mathcal{K}\rangle \pm (\langle a^\dagger S^+ + aS^-\rangle)^2$, где верхний знак у последнего среднего в правой части равенства отвечает дисперсии оператора $\mathcal{M}_x$, а нижний – дисперсии оператора $\mathcal{M}_y$. Необходимые для расчета стационарные средние вновь найдем с помощью основного уравнения (6). В случае равенства скоростей затухания подсистем ($\gamma = C$), имеем $\langle\mathcal{K}\rangle = N + (N+1)(2N+1)^{-1}$, среднее $\langle a^\dagger S^+ + aS^-\rangle = (M^* + M)[(2N+1)(N+1)]^{-1}$, а величина $|\langle\mathcal{K}S_z\rangle| = (N+1)(2N+1)^{-1}$.

Зависимость $G(r)$ среднего значения дисперсии оператора $\mathcal{M}_x$, нормированного на модуль среднего значения произведения операторов $\langle\mathcal{K}S_z\rangle$, представлена на рисунке сплошной кривой. Область сжатых состоянии отвечает значениям этой функции, меньшим единицы, и определена областью значений параметра сжатия исходного источника $0 < r < 0.44$. Минимальное, оптимальное из всех возможных сжатое состояние реализуется при возбуждении системы источником с параметром сжатия $r = 0.28$. При этом сжатие дисперсии анализируемой квадратуры достигает значения 0.897 относительно уровня когерентного состояния, принятого здесь за единицу.

Обратим внимание на то, что область сжатых состояний, полученных на основе соотношений для коллективных операторов деформированной алгебры su(2), включает в себя сжатые состояния, построенные для бозонных коллективных операторов. При этом в области $0.3 \lesssim r < 0.44$ состояние коллективной системы является неклассическим относительно алгебры операторов третьего порядка и классическим относительно бозонных коллективных операторов. Найденная особенность может быть применена для скрытия информации. Действительно, в рассматриваемой ситуации состояние источника переносится на состояние коллективной системы. При этом само исходное состояние светового источника в конечном итоге определено параметром сжатия, который модулируется интенсивностью классической волны накачки параметрического источника. Если выбран источник с параметром сжатия, лежащим в интервале $0.3 \lesssim r < 0.44$, то такое состояние приводит к корреляциям атома и моды коллективной системы. Однако состояние последней проявляет на себе квантовые черты только при наблюдении коллективных операторов, отвечающих алгебре операторов третьего порядка, построенных на основе деформации алгебры операторов su(2). Пользователь, регистрирующий при этом наблюдаемые, отвечающие коллективным бозонным операторам, зафиксирует такое состояние как шумовое классическое состояние, близкое к когерентному, и никак не сможет выявить его квантовые особенности. Отметим, что экспериментальные условия рассмотренного здесь примера уже могут быть реализованы. Так, например, широкополосный источник двух пространственно перепутанных компонент был экспериментально реализован [20] и использован для задач квантовой теории информации [21]. Необходимые значения параметра сжатия источника, используемого в рассматриваемом эффекте, также уже могут быть реализованы. К настоящему времени достигнуты значения $r \approx 0.8$. При этом значение интенсивности волны накачки должно быть порядка 10^4 Вт/м^2. Наконец, трудно достижимое условие равенства констант релаксации двухуровневой системы и выделенной высокодобротной моды может быть реализовано в условиях ридберговских атомов и поля микромазерной генерации, а также некоторых других [22].

Итак, мы показали, что состояние простой системы из одиночного двухуровневого атома и высокодобротной резонаторной моды, находящихся в перепутанном термостате, обладающем квантовыми корреляциями, может быть неклассическим с двойственным (или дуальными) квантовыми особенностями.

При этом возможно получение квантового состояния, которое оказывается сжатым относительно как одного, так и другого набора образующих разных коллективных операторов, отвечающих алгебрам с разными коммутационными соотношениями, а следовательно, и разными свойствами. Однако вследствие того, что операторы наблюдаемых, как и образующие обеих введенных алгебр, не коммутируют между собой, с точки зрения эксперимента возможно наблюдение только одного типа сжатых состояний названной системы.

Автор благодарен С.П. Кулику за полезные обсуждения.

---

1. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, М.: Физматлит, 2000.
2. Г.Ф. Гром, А.М. Кузьмич, Письма в ЖЭТФ **61**, 883 (1995); A. Kuzmich, N.P. Bigelow, and L.Mandel, Europhys. Lett. **43**, 481 (1998); A. Kuzmich, K. Molmer, and E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **79**, 4782 (1997).
3. A. Kuzmich, K. Molmer, and E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **62**, 033809 (2000).
4. J.H. Bell, Physics, **1**, 195 (1964); S.J. Freedman and J.F. Clauser; Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972); A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982); P.G. Kwiat, A.M. Steinberg, and R.Y. Chiao, Phys. Rev. A **47**, R2472 (1993).
5. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996); M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
6. L.-M. Duan, G. Gedke, J.I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2002); R. Simon, Phys. Rev. Lett., **84**, 2726 (2002).
7. Д.Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, М.: Наука, 1980.
8. В.П. Карасев, ТМФ **95**, 3 (1993).
9. В.П. Карасев, Письма в ЖЭТФ **84**, 759 (2006).
10. В.П. Карасев, А.В. Масалов, Оптика и спектр. **74**, 928 (1993).
11. В.П. Карасев, С.П. Кулик, ЖЭТФ **131**, 37 (2007).
12. V.P. Karassiov, A.A. Gusev, and S.I. Vinitsky, Phys.Lett. A **295**, 247 (2002).
13. В.П. Карасев, ТМФ, **145**, 344 (2005); В.П. Карасев, А.В. Масалов, ЖЭТФ, **126**, 63 (2004).
14. А.М.Башаров, ЖЭТФ **137**, 1090 (2010).
15. D.F. Walls and G.J. Milburn, *Quantum optics*, Springer, 1994.
16. C.W. Gardiner and M.J. Collett, Phys. Rev. A. **31**, 3761 (1985); А.М. Башаров, ЖЭТФ **111**, 25 (1997).
17. C.W. Gardiner, Phys. Rev. Lett. **56**, 1917 (1986).
18. В.Н. Горбачев, А.И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ, **89**, 571 (2009); В.Н. Горбачев, А.И. Трубилко, ЖЭТФ, **135**, 227 (2009); В.Н. Горбачев, А.И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ, **92**, 689 (2010); В.Н. Горбачев, А.И. Трубилко, ЖЭТФ **138**, 616 (2010).
19. А.М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применение*, М.: Наука, 1987.
20. T. Iskhakov, M.V. Chekhova, and G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. **102**, 183602 (2009).
21. N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. **94**, 220502 (2005); H. Yonezawa, S.L. Braunstein, and A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. **98**, 110503 (2007).
22. K. Hammerer, M. Wallquist, C. Geneset et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 063005 (2009); M. Wallquist, K.Hammerer, P. Zoller et al., Phys. Rev. A. **81**, 023816 (2010).